

**Mathematische Logik**  
Sommersemester 2020  
Übungsblatt 6, 16.6.2020

Abgabe spätestens am 23.6.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (4 Punkte) Sei  $\alpha$  eine Limesordinalzahl. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

- (a)  $\forall \beta, \gamma < \alpha (\beta + \gamma < \alpha)$ .
- (b)  $\forall \beta < \alpha (\beta + \alpha = \alpha)$ .
- (c)  $\forall X \subseteq \alpha ((X, \in) \cong (\alpha, \in) \vee (\alpha \setminus X, \in) \cong (\alpha, \in))$ .
- (d)  $\exists \delta (\alpha = \omega^\delta)$  (Ordinale Exponentiation).

2. (6 Punkte)

- (a) Kann man  $(\omega_1, <)$  in  $(\mathbb{R}, <)$  einbetten? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge  $\{f : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetige Funktion}\}$  als Mächtigkeit einer bekannten Menge.

3. (6 Punkte) Beweisen Sie ohne Verwendung des Auswahlaxioms den Satz von Schröder-Bernstein. Seien  $A, B$  Mengen und seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow A$  Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion  $h : B \rightarrow A$ .

*Hinweis:* Definieren Sie induktiv über  $n \in \omega$ :

$$A_0 := A \text{ und } B_0 := B$$
$$A_{n+1} := g[B_n] \text{ und } B_{n+1} := f[A_n].$$

Hier schreiben wir für  $f : X \rightarrow Y$  und  $A \subseteq X$ :

$$f[A] := \{f(a) : a \in A\}.$$

$f[A]$  ist also die Bildmenge der Funktion  $f \upharpoonright A$ . Eine andere übliche Schreibweise ist  $f''A$ .