

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 7, 23.6.2020

Abgabe spätestens am 30.6.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (4 Punkte) Sei X eine nicht leere Menge. Ein *Filter über X* ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ and $X \in \mathcal{F}$
2. $\forall Y \in \mathcal{F} \forall Z \subseteq X (Y \subseteq Z \rightarrow Z \in \mathcal{F})$
3. $\forall Y_1, Y_2 \in \mathcal{F} (Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F})$.

Ein Ultrafilter \mathcal{U} über X ist ein \subseteq -maximaler Filter über X , d.h.

$$\forall Y \subseteq X (Y \notin \mathcal{U} \rightarrow \exists Z \in \mathcal{U} (Z \cap Y = \emptyset)).$$

Kann jeder Filter über X zu einem Ultrafilter erweitert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Man darf das Auswahlaxiom benutzen.

2. (2 Punkte) Ist ω^ω abzählbar (ordinale Exponentiation)? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (4 Punkte) Arbeiten Sie in ZF:

- (a) Sei $f : X \rightarrow Y$ injektiv. Finden Sie eine Injektion $i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.
- (b) Gibt es eine Injektion von $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
- (c) Gilt $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$? (Versuchen Sie mit Injektionen in beide Richtungen. Sie dürfen den Satz von Cantor, Schröder und Bernstein ($a \preceq b \wedge b \preceq a \rightarrow a \sim b$) aus einem früheren Aufgabenblatt ohne Beweis benutzen.)

4. (6 Punkte) Sei φ eine beliebige L_{Me} -Aussage. Zeigen Sie:

- (a) $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ gdw. $ZFC \vdash \varphi$.
- (b) $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ gdw. $ZFC \vdash \neg \varphi$.
- (c) $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ gdw. $ZFC \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{CON}_{ZFC}$.

(*Hinweis:* Benutzen Sie den 2. Gödel'schen Unvollständigkeitssatz für $ZFC' := ZFC \cup \{\neg \varphi\}$, dessen Gültigkeit angenommen werden darf.)