

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 9, 7.7.2020

Abgabe spätestens am 14.7.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (3 Punkte) Wenn A_n , $n \in \mathbb{N}$, jeweils rekursiv ist, ist dann auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Wir betrachten die folgende Aussagen: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$, A unendlich.
 - (i) A ist rekursiv.
 - (ii) A ist das Bild einer rekursiven Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m (n < m \Rightarrow f(n) < f(m))$.

Antworten Sie die folgende Fragen (und begründen Sie Ihre Antwort jeweils):

- (a) (2 Punkte) Folgt (i) aus (ii)?
 - (b) (2 Punkte) Folgt (ii) aus (i)?
 - (c) (2 Punkte) Sei B rekursiv aufzählbar. Gibt es $C \subseteq B$, $|C| = |B|$, so dass C rekursiv ist? (*Hinweis:* Falls B unendlich ist, kann man auf der Suche nach einem rekursiven C geeignete Ausdünnung von B heranziehen.)
3. (3 Punkte) Wir erweitern eine entscheidbare Theorie (d.h. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : T \vdash \varphi\}$ ist rekursiv) um endlich viele Axiome. Ist die neue Theorie auch entscheidbar?
4. (4 Punkte)
 - (a) Wieviele arithmetische Mengen gibt es?
 - (b) Wieviele nicht arithmetische Teilmenge von \mathbb{N} gibt es? Vergleichen Sie die Mächtigkeit mit der Mächtigkeit einer bekannten Menge.