Mathematische Logik
SS 2021
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 3

04.05.2021

Abgabe in Ilias vor dem 11.05.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Alle Variablen in dieser Aufgabe stehen für aussagenlogische Formeln.

Seien g_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigvee_{i=1}^{N} g_i$$

heißt Formel in *disjunktiver Normalform.*

Seien c_i Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigwedge_{i=1}^{N} c_i$$

heißt Formel in *konjunktiver Normalform.*

Ist jede aussagenlogische Formel zu einer Formel in disjunktiver Normalform und zu eine Formel in konjunktiver Normalform äquivalent?

(Hinweis: Führen Sie Induktion über die Anzahl der Variablen. Leiten Sie für drei Variable Distributivgesetze her und benutzen Sie die de Morgan'schen Regeln.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Ein n–stelliger Junktor ist eine Abbildung $J : \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$. Eine Menge S von Junktoren heißt *vollständiges Junktorensystem*, falls sich für jedes $n \geqslant 1$ jeder n–stellige Junktor durch Elemente aus S darstellen lässt. Zeigen Sie:

i) Der “Sheffer Stroke” $\uparrow$ ist ein zweistelliger Junktor mit der folgenden Wahrheitstabelle:

P	Q	$P \uparrow Q$
W	**W**	**F**
W	**F**	**W**
F	**W**	**W**
F	**F**	**W**

Zeigen Sie, dass $\{\uparrow\}$ ein vollständiges Junktorensystem ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\{\wedge\}$ kein vollständiges Junktorensystem ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir schreiben für die Aussagenlogik $\varphi \models \psi$, wenn für alle Wahrheitsbelegungen μ gilt: Wenn $\mu(\varphi) = W$, so $\mu(\psi) = W$. Für Satzmengen sei $\Phi \models \psi$ entsprechend definiert: Für alle μ, wenn μ alle $\varphi \in \Phi$ wahr macht, so $\mu(\psi) = W$.

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache erster Stufe oder eine Menge aussagenlogischer Formeln. $\Phi \subseteq \mathcal{L}$ heißt unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen φ_1, $\varphi_2 \in \Phi$ nicht $\varphi_1 \models \varphi_2$. Ξ heißt Axiomatisierung von Φ, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt: $\Xi \models \varphi$ gdw $\Phi \models \varphi$.

(a) Hat jede abzählbare Formelmenge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine unabhängige Axiomatisierung?

(b) Hat jede Formelmenge eine unabhängige Axiomatisierung, die Teilmenge von ihr ist?