Mathematische Logik
SS 2021
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 4

11.05.2021

Abgabe in Ilias vor dem 18.05.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Eine Struktur (V, E) heißt (ungerichteter) Graph, wenn V eine nicht leere Menge ist und $E \subseteq [V]^2$. Hierbei ist $[V]^2$ die Menge aller ungeordneten Zweiertupel aus V, technisch $[V]^2 = \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$.

Sei m endlich und ungleich 0. Ein Graph (V, E) heißt m-färbbar, wenn es eine Einteilung der Vertizes in m disjunkte Teilmengen gibt, so dass je zwei Vertizes, die derselben Teilmenge angehören, durch keine Kante verbunden sind.

Gilt folgendes: Sei (V, E) ein abzählbarer Graph, d.h., V ist abzählbar. Wenn jeder endliche Teilgraph $(V_0, E \cap [V_0]^2)$ m-färbbar ist, so ist ganz (V, E) m-färbbar?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

1. Gilt $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\psi \vee \varphi)$?
2. Gilt $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$?
3. Folgt aus $\vdash \exists y\forall x\varphi(x, y)$ die Beweisbarkeitsaussage $\vdash \forall x\exists y\varphi(x, y)$?
4. Gilt $\vdash (\exists x\psi \wedge \exists x\varphi) \to \exists x(\psi \wedge \varphi)$?

Begründen Sie Ihre Antworten. Dies gilt für alle Aufgaben.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Es sei $L = \{<\}$ und T sei die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne kleinstem und größtem Element, d.h. T ist der deduktive Abschluss der folgenden Satzmenge:

1. $\forall x(\neg(x < x))$
2. $\forall x\forall y(x < y \vee y = x \vee y < x)$
3. $\forall x\forall y\forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
4. $\forall x\exists y(y < x \wedge \neg\exists z(y < z < x))$
5. $\forall x\exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z < y))$

Hierbei steht $y < z < x$ für $y < z \wedge z < x$. Diese Schreibweise ist bei Stukturen, die Satz Nummer 3 erfüllen, üblich. Es sei $<$ die übliche lineare Ordnung von $\mathbb{Z}$.

1. Ist $(\mathbb{Z}, <) \models T$?

2. Ist $(\mathbb{N}, <) \models T$?

3. Sei $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, <)$ aus zwei hinteinanderliegenden Kopien von $\mathbb{Z}$ hergestellt. Sei a ein Element der ersten Kopie und b ein Element der zweiten Kopie. Sei $\varphi(a, b)$ eine Formel mit n Quantoren die in $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, <)$ wahr ist.

   Gibt es $c, d \in \mathbb{Z}$, so dass $(\mathbb{Z}, <) \models \varphi[c, d]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (Schwerere Zusatzfrage ohne Punkte, deren Antwort auch nicht ganz kurz ist.) Ist T vollständig?