Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 5

18.05.2021, am 20.5.ergänzt

Abgabe in Ilias vor dem 01.06.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei L eine Symbolmenge. Eine Klasse von L-Strukturen heißt *elementar*, wenn sie die Klasse aller Modelle einer Theorie ist.

1. Ist die Klasse aller unendlichen L-Strukturen elementar?
2. Ist die Klasse aller endlichen L-Strukturen elementar?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine fundierte Relation, d.h.

$$\forall B \subseteq A(B \neq \emptyset \to \exists b \in B \forall c \in B \neg cRb).$$

Solch ein b heißt R-minimales Element von B. Man definiert eine Funktion $\varrho : A \to \mathrm{On}$ wie folgt:

$$\varrho(a) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \neg\exists b(b \in A \wedge bRa); \\ \sup\{\varrho(b)+1 : bRa\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei steht $x+1$ für $x \cup \{x\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $\forall x, y \in A(xRy \to \varrho(x) < \varrho(y))$.
2. $\varrho(x) = \inf\{\alpha : \forall y \in A(yRx \to \varrho(y) < \alpha)\}$.

   Hinweis: Bei Teil 2 können Sie Induktion über α versuchen.
3. Es wird behauptet, dass ϱ eine Funktion mit Definitionsbereich A und Zielbereich On ist. Stimmt dies? Woraus folgern Sie dies?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Eine lineare Ordnung heißt archimedisch, wenn die natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung eine Substruktur sind und die nicht erststufige Formel $\forall x \bigvee_{n \in \mathbb{N}} x < n$ gilt.

Gegeben sei der angeordnete Körper $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ der reellen Zahlen. Dieser ist archimedisch. Gibt es eine zu $\mathfrak{R}$ elementar äquivalente Struktur, die nicht archimedisch geordnet ist? (Die Vollständigkeit kann nicht erststufig ausgedrückt werden.)

Hinweis: Verwenden Sie die Kompaktheitssatz. Ein nützlicher Trick ist auch eine Spracherweiterung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten eine alternative Definition der Endlichkeit.

- Eine Menge S heißt T-*endlich*, wenn jede nicht leere Menge $X \subseteq \mathfrak{P}(S)$ ein $\subseteq$-maximales Element hat, d.h. $u \in X$ und für alle $v \in X$ gilt $u \subsetneqq v$. (Der Buchstabe T kommt von Tarski.)
- Eine Menge S heißt T-*unendlich*, wenn S nicht T-endlich ist.
- Eine Menge M heißt *endlich*, wenn es eine Bijektion von M auf eine natürliche Zahl gibt.
- Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie nicht endlich ist.

1. Ist jedes $\underline{n} \in \omega$ T-endlich?
2. Ist ω T-unendlich?
3. Ist jede endliche Menge T-endlich?
4. Ist jede unendliche Menge T-unendlich?

Wo verwenden Sie in Ihrer Argumentation das Auswahlaxiom? Begründen Sie die Antworten.