Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 6

01.06.2021

Abgabe in Ilias vor dem 08.06.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das Paarmengenaxiom aus dem Ersetzungsaxiom, dem Potenzmengenaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es sei X eine transitive Menge.

1. Ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ auch transitiv?
2. Ist $\bigcup X$ transitiv?
3. Ist $\{\{X\}\}$ transitiv?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\mathrm{tcl}(x)$ die $\subseteq$-*kleinste* transitive Menge y mit $x \in y$ ist, in anderen Worten, dass für jede transitive Menge z mit $x \in z$ gilt: $z \supseteq \mathrm{tcl}(x)$.

Die folgende Aufgabe war aus Versehen schon auf dem vorigen Blatt. Dies war zu früh, denn sie handelt von einer transfiniten Rekursion.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine fundierte Relation, d.h.

$$\forall B \subseteq A(B \neq \emptyset \to \exists b \in B \forall c \in B \neg cRb).$$

Solch ein b heißt R-minimales Element von B. Man definiert eine Funktion $\varrho : A \to \mathrm{On}$ wie folgt:

$$\varrho(a) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \neg\exists b(b \in A \wedge bRa); \\ \sup\{\varrho(b) \cup \{\varrho(b)\} : bRa\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. $\forall x, y \in A(xRy \to \varrho(x) < \varrho(y))$.
2. $\varrho(x) = \inf\{\alpha : \forall y \in A(yRx \to \varrho(y) < \alpha)\}$. *Hinweis:* Bei Teil 2 können Sie Induktion über α versuchen.
3. Es wird behauptet, dass ϱ eine Funktion mit Definitionsbereich A und Zielbereich On ist. Stimmt dies? Woraus folgern Sie dies?

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

Bemerkung zum Nachdenken. Es ist nicht erwartet, dass Sie etwas dazu schreiben. Die Existenz von ϱ kann man mit dem Rekursionssatz für die Ordinalzahlen begründen: Induktiv über $\alpha \in \mathrm{On}$ definieren wir $G(\alpha) = \{a \in A : \varrho(a) \leq \alpha\}$ und setzen danach $\varrho(a) = \alpha$ falls $a \in G(\alpha) \setminus \bigcup\{G(\beta) : \beta < \alpha\}$.

Wie sieht $G(0)$ aus, wie $G(\alpha)$ als Ausdruck von $\langle G(\beta) : \beta < \alpha \rangle$, also ohne Rückgriff auf ϱ?

Noch einfacher könnte man die Existenz von ϱ mit Rekursion über (A, R) beweisen. Eine dazu passende Form des Rekursionssatzes wird im Exkurs genannten Video vorgerechnet. Jener Exkurs gehört jedoch eher in eine weiterführende Vorlesung.