

BLATT 7
08.06.2021

Abgabe in Ilias vor dem 15.06.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte). Verwenden Sie transfinite Induktion, um zu zeigen, dass jede Ordinalzahl α entweder

- gleich ist wie $\beta + n$, wo β die Null oder eine Limeszahl ist und n eine gerade natürliche Zahl ist;
- oder gleich ist wie $\beta + n$, wo β die Null oder eine Limeszahl ist und n eine *ungerade* natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Ist \mathbb{Q} abzählbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Angenommen, in der Ebene \mathbb{R}^2 liegt eine Menge paarweise disjunkter offener Kreisscheiben, von denen jede Radius > 0 hat. Ist die Menge der Kreisscheiben dann höchstens abzählbar?

Hinweis: Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Das Lemma von Zorn dürfen Sie nun ohne Beweis benutzen. Sie sollten jedoch die einzelnen Argumentationsschritte klar darstellen.

Hier ist noch ein Denkanregung als Zusatz (d.h. freiwillig und ohne Abgabe): Sind je zwei Basen gleichmächtig? Wie vererbt ich die Steinitz'sche Austauschenschaft im Limeschritt einer transfinit langen Austauschkonstruktion?