Mathematische Logik
SS 2021
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 8
Fassung vom 17.06.2021

Abgabe in Ilias vor dem 22.06.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Die vorliegende Fassung des Aufgabenblatts ist etwas leichter als die am 15.6. postierte.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Ist ω^ω abzählbar (ordinale Exponentiation)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Arbeiten Sie in ZF:

1. Sei $f : X \to Y$ injektiv. Finden Sie eine Injektion $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.
2. Gibt es eine Injektion von $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
3. Gilt $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$? (Versuchen Sie mit Injektionen in beide Richtungen. Sie dürfen den Satz von Cantor, Schröder und Bernstein ($a \preceq b \wedge b \preceq a \to a \sim b$) ohne Beweis benutzen.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es mindestens $2^{\aleph_0} = |\{f : f\colon \omega \to 2\}| = |\mathcal{P}(\omega)|$ abzählbare Modelle von

$$\mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\varphi : \varphi\ L_{\mathrm{Ar}}\text{-Aussage}, (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0, 1, S^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}) \models \varphi\}$$

gibt, die nicht isomorph sind.

Hinweis: Seien P die Primzahlen. Zeigen Sie, dass es für jede Menge A von Primzahlen ein Modell mit einem Element c_A gibt, das genau durch die Primzahlen in A teilbar ist. Hierzu nimmt man die Formelmenge

$$\Phi_A = \{\underline{n} \text{ teilt } x : n \in A\} \cup \{\underline{n} \text{ teilt nicht } x : n \in P \setminus A\}$$

und den Endlichkeitssatz. Solch eine Menge heißt auch partieller Typ (partial type). Wieviele verschiedene Φ_A gibt es? Wieviele Φ_A können jeweils in einem abzählbaren Modell erfüllt sein?

Bemerkung (nicht zum Abgeben als Hausaufgabe gedacht): Es gibt auch höchstens $2^{\aleph_0}$ Modelle. Dies zeigt man unter Benutzung von $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei φ eine beliebige L_{Me}-Aussage. Zeigen Sie:

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

1. $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ gdw. $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi$.

2. $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \mathrm{Bew}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$ gdw. $\mathsf{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{CON}_{\mathsf{ZFC}}$.

   (*Hinweis:* Benutzen Sie den 2. Gödel'schen Unvollständigkeitssatz für $\mathsf{ZFC}' := \mathsf{ZFC} \cup \{\neg\varphi\}$, dessen Gültigkeit angenommen werden darf.)