

BLATT 9

22.06.2021 Version von 30.6.2021

Abgabe in Ilias vor dem 29.06.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte). Schreiben Sie ein Registerprogramm für eine Kopiermaschine $\mathcal{K}^{0,1}$, die den Inhalt des Registers \mathcal{R}_1 in das Register \mathcal{R}_0 kopiert. Wieviele zusätzliche Register (sogenannte Hilfsregister) brauchen Sie?

Aufgabe 2 (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen ist primitiv rekursiv? Begründen Sie Ihre Antworten mit anschaulichen Skizzen der Berechnungsverfahren. Man kann annehmen, dass L eine endliche Sprache ist. Man kann die Gödelisierung der Sprache der Mengenlehre um geeignete Klauseln erweitern.

1. $\{\ulcorner t \urcorner : t \text{ ist ein } L\text{-Term}\}$.
2. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \text{ ist eine } L\text{-Formel}\}$.
3. $\{(n, \ulcorner \varphi \urcorner) : v_n \text{ ist frei in } \varphi\}$.
4. $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \text{ ist eine } L\text{-Aussage}\}$.

Die Bonuspunkte in den folgenden Übungen zählen im Zähler, aber nicht im Nenner des Quotienten, der mindestens $\frac{1}{2}$ sein sollte für die Studienleistung.

Definition 1. Die *Ackermannfunktion* $A: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch $A(x, 0) = 2 + x$, $A(0, 1) = 0$, $A(0, y) = A(1, y - 1)$ für $y > 1$ und $A(x + 1, y + 1) = A(A(x, y + 1), y)$.

Aufgabe 3 (2 Bonuspunkte). Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(x) := A(x, n)$, für $n = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte).

1. Ist (bei festem n) die Funktion A_n primitiv rekursiv?
2. Ist die Ackermannfunktion rekursiv?

Aufgabe 5 (3+2 Bonuspunkte).

1. Zeigen Sie: Für jede primitiv rekursive Funktion $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ gibt es ein n , so dass für alle $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ gilt:

$$f(x_1, \dots, x_k) \leq A(\max(x_1, \dots, x_n), n).$$

2. Ist die Ackermannfunktion primitiv rekursiv?