Mathematische Logik
SS 2021
Übungen

Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Maxwell Levine

BLATT 10
29.06.2021

Abgabe in Ilias vor dem 06.07.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne »Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Wenn A_n, $n \in \mathbb{N}$, jeweils rekursiv ist, ist dann auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden Aussagen: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$, A unendlich.

(i) A ist rekursiv.

(ii) A ist das Bild einer rekursiven Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m(n < m \Rightarrow f(n) < f(m))$.

Antworten Sie die folgende Fragen (und begründen Sie Ihre Antwort jeweils):

(a) (2 Punkte) Folgt (i) aus (ii)?

(b) (2 Punkte) Folgt (ii) aus (i)?

(c) (2 Punkte) Sei B rekursiv aufzählbar. Gibt es $C \subseteq B$, $|C| = |B|$, so dass C rekursiv ist? (*Hinweis*: Falls B unendlich ist, kann man auf der Suche nach einem rekursiven C geeignete Ausdünnung von B heranziehen.)

Anschauliche Beschreibungen der Rechenverfahren genügen, d.h. wir erwarten keine Registermaschinenprogrammierung und keine Darstellungen im Sinne der Kleene'schen Normalform.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Wir erweitern eine entscheidbare Theorie (d.h. $\{\ulcorner\varphi\urcorner : T \vdash \varphi\}$ ist rekursiv) um endlich viele Axiome. Ist die neue Theorie auch entscheidbar?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

(a) Seien A und B rekursiv aufzählbar. Ist dann auch $A \cap B$ rekursiv aufzählbar?

(b) Sind die rekursiv aufzählbaren Mengen unter beschränkter Quantifizierung abgeschlossen? Sei $A \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiv aufzählbar. Dann entsteht

$$B = \{m : (\exists i \leq n)(m, i) \in A\}$$

durch beschränkte Quantifizierung von A.

Für eine bejahende Antwort genügt eine anschauliche Beschreibung eines Verfahrens, das die rekursive Aufzählbarkeit bezeugt.