

BLATT 11
06.07.2021

Abgabe in Ilias vor dem 13.07.2021 um 12 Uhr im Pfad „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2021 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik SoSe2021“. Innerhalb dieses Ilias-Kurses öffnet man den Ordner „Abgaben.“

Aufgabe 1 (4 Punkte).

1. Wir betrachten arithmetische Mengen. Wie gestatten im Gegensatz zum Skript in der definierenden Formel φ nicht nur \bar{a} , sondern auch noch ein endliches Tupel $\bar{b} \in \mathbb{N}^n$ für ein n . Solche Mengen heißen “definierbar mit Parametern”. Gibt es es in \mathfrak{A} mit Parametern definierbare Relationen, die nicht arithmetisch sind?
2. Wieviele arithmetische Mengen gibt es?

Aufgabe 2 (4 Punkte). Finden Sie eine Formel φ und ein Modell \mathfrak{A} von Q^* so dass $Q \vdash \varphi$ und $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

Hinweis: Denken Sie an ein Nichtstandardmodell \mathfrak{A} . Könnte im Nichtstandardteil eine Schleife liegen?

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte). Sei L endlich. Zeigen Sie: Jede L -Theorie widerspruchsfreie T mit rekursiven T^+ lässt sich zu einer widerspruchsfreien rekursiven vollständigen Theorie erweitern. In Zieglers Buch heißt eine Theorie T mit entscheidbarem T^+ entscheidbar.

Hinweis: Beachten Sie hierzu den Vervollständigungsschritt im Beweis des Gödel’schen Vollständigkeitssatzes und auch Aufgabe 3 von Blatt 10. Für den Nachweis, dass die von Ihnen vorgeschlagene Vervollständigung rekursiv ist, brauchen Sie nur anschaulich zu argumentieren, dass es einen Algorithmus zur Berechnung gibt.

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte). Zeigen Sie, dass man nicht entscheiden kann, ob eine vorgelegte Registermaschine mit leerer Eingabe stoppt.

Hinweis: Sei A eine rekursiv aufzählbare, aber nicht rekursive Menge. Sei \mathcal{M} eine Maschine, die die partielle Funktion $A \times \{0\}$ berechnet. Betrachten Sie für jedes n die Maschine \mathcal{M}_n , die bei leerer Eingabe so läuft wie \mathcal{M} mit Eingabe n .