BLATT 11

(19.7.2022)

Es sei K ein Körper und seien (A, V) und (B, W) affine Räume über den K-Vektorräumen V bzw. W. Eine Abbildung $\Phi_A\colon A \to B$ heißt *affin*, wenn es eine lineare Abbildung $\Phi_V : V \to W$ gibt, so dass für alle $P \in A$ und $v \in V$,

$$\Phi_A(P + v) = \Phi_A(P) + \Phi_V(v).$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

a) Zeigen Sie, dass Translationen affin sind.

b) Zeigen Sie, dass die Projektionen von $A \times B$ nach A bzw. B affin sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Es seien $\Phi_A : A \to B$ eine affine Abbildung und $g, h \subseteq A$ zwei Geraden, also eindimensionale affine Teilräume von A.

a) Zeigen Sie, dass das Bild $\Phi_A[g]$ entweder eine Gerade oder ein Punkt in B ist.

b) Seien g und h parallel und $\Phi_A[g]$ ein Punkt in B, ist dann auch $\Phi_A[h]$ ein Punkt in B?

c) Seien sowohl $\Phi_A[g]$ als auch $\Phi_A[h]$ zwei Punkte in B, sind g und h dann parallel?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es sei $n \geq 2$. Finden Sie für jedes $0 \leq i \leq n$ eine Teilmenge U_i' der i-ten standardaffinen Teilmenge $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$, sodass

$$\bigcup_{i=0}^{n} U_i' = \mathbb{P}^n \quad \text{ und } \quad U_i' \cap U_j' = \emptyset \text{ für alle } i \neq j.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Eine projektive Gerade im $\mathbb{P}^3$ ist eine Teilmenge von der Form $\bar{g}$ für eine affine Gerade $g \subseteq \mathbb{A}^3$ (wie in Satz 4.38). Seien g_1, g_2, g_3 paarweise disjunkte Geraden im $\mathbb{A}^3$. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $[x] \in \bar{g}_1$ genau eine projektive Gerade $\bar{g}(x)$ gibt, die sowohl $\{[x]\}$ als auch $\bar{g}_2$ als auch $\bar{g}_3$ schneidet.
Gilt ein entsprechender Satz auch für den affinen Raum $\mathbb{A}^3$?

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten im Keller der Ernst-Zermelo-Str.1 mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Dienstag 26.07.2022, 12 Uhr.