Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Francesco Gallinaro

BLATT 2

(08.05.2023)

Sei $n \in \mathbb{N}$, φ eine partielle Funktion von $\mathbb{N}^n$ nach $\mathbb{N}$. Seien T_n das Kleene-Prädikat und U die im Normalformentheorem verwendete Projektionsfunktion. Eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ heißt *Index von* φ, wenn $\varphi \simeq \varphi_e$ und für $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$, $\varphi_e(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Ist die Menge der Indizes der partiellen rekursiven Funktionen rekursiv oder sogar primitiv rekursiv? Sie können zum Beispiel ein Flussdiagramm skizzieren, um Ihre Antwort zu begründen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein partielle Funktion und sei $G_\varphi := \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{N} \wedge \varphi(x) \downarrow\}$. Die Menge G_φ heißt Graph von φ.

1. Sei φ eine partielle rekursive Funktion. Ist G_φ rekursiv aufzählbar?
2. Sei G_φ rekursiv aufzählbar. Ist φ partiell rekursiv?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $\psi : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ eine partielle rekursive Funktion, und sei $\varphi(\vec{x}) \simeq \mu y(\psi(\vec{x}, y) \simeq 0)$. Ist φ partiell rekursiv?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Gibt es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für jedes $e \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto f(e, x)$ primitiv rekursive ist und es für jede primitiv rekursive Funktion $h(x)$ ein $e \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(\forall x \in \mathbb{N})(f(e, x) = h(x))$?

Könnte man sogar eine primitiv rekursive Funktion f mit den genannten Eigenschaften finden?
Hinweis: Betrachten Sie

$$f(e, x) := \begin{cases} U(\mu y T_1(e, x, y)), & \text{wenn } e \text{ der Index einer primitiv rekursiv Funktion ist;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, dem 15.05.2023, um 16:15 Uhr.