Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Francesco Gallinaro

BLATT 6

(19.06.2023)

Wir erinnern an die Definition von D_u. Sei $u = \sum_{i=0}^{k} 2^{n_i} \in \mathbb{N}$. Wir setzen $D_u = \{n_i \mid i \leq k\}$.

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Für den Turinggrad von A schreiben wir $\deg(A)$, also $\deg(A) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid A \equiv_T B\}$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *einfach* (simple), wenn sie r.e. ist und ihr Komplement keine unendliche r.e. Teilmenge hat, aber unendlich ist.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $A \leq_T B$, so $\overline{A} \leq_T B$.

(b) Wenn $A \leq B$, so $A \leq_T \overline{B}$

(c) $\deg(A) = \deg(\overline{A})$.

(d) $\mathbf{o}' = \deg(K)$ enthält auch nicht rekursiv aufzählbare Mengen. Die Menge K ist das Halteproblem.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
Seien A, B r.e. Es gebe eine rekursive Relation R, so dass für alle x:

$$x \in A \leftrightarrow \exists u \exists z (D_u \subseteq B \wedge R(x, u, z)).$$

Gilt dann $A \leq_T B$?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn A einfach ist, so hat A keine ko-unendliche rekursive Obermenge.

(b) Wenn A keine ko-unendliche rekursive Obermenge hat, so ist A einfach.

(c) Die einfachen Mengen sind gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen.

(d) Wenn A einfach ist und W_x unendlich ist, so ist $A \cap W_x$ unendlich.

Aufgabe 4 (Bonus 4 Punkte)**.**
Schwerere Aufgabe. Gibt es eine einfache Menge?

Man kann auch Seite 109 in Robert Soare, *Turing Computability* konsultieren.

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, dem 26.06.2023.