BLATT 8
(04.07.2023)

1. (4 Punkte) $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2$ ist der kleinste Turinggrad über $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$. Zeigen Sie: Es gibt so einen Grad: Wenn $A_1 \in \mathbf{a}_1$, $A_2 \in \mathbf{a}_2$, dann ist

   $$\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 = A_1 \oplus A_2 / _{\equiv_T}.$$

   Hierbei ist das Orakel $A_1 \oplus A_2 \subseteq \mathbb{N}$ dadurch hergestellt, dass A_1 (mit dem Faktor zwei gestreckt) auf die gerade Zahlen geschrieben wird und A_2 (um zwei gestreckt und eins verschoben) auf die ungeraden Zahlen geschrieben wird.

2. (4 Punkte) Sei $\{A_y\}_{y \in \omega}$ eine unendliche Folge von Mengen. Wir definieren

   $$\oplus_y A_y := \{\langle x, y\rangle : x \in A_y \wedge y \in \omega\}.$$

   Zeigen Sie: Wenn es eine Menge C und eine rekursive Funktion f gibt, so dass $A_y = \varphi^C_{f(y)}$ für alle y, dann ist $\oplus_y A_y \leq_T C$. Hierbei ist $\langle x, y\rangle$ zum Beispiel $2^{x+1} \cdot 3^{y+1}$.

3. (4 Punkte) Für zwei r.e. Mengen A, B definieren wir die $D := A \setminus B$. Mengen dieser Art heißen *Differenz von r.e.* Mengen (d.r.e.).

   Seien D, D' d.r.e. Mengen. Ist $D \cap D'$ eine d.r.e. Menge?

4. (4 Punkte) Sei $\varepsilon := \{A \subseteq \omega : A \text{ ist r.e.}\}$ und sei $\mathcal{B}$ die von ε erzeugte boolesche Algebra. Das heißt: $\mathcal{B}$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, so dass:

   - $\mathcal{B} \supseteq \varepsilon$,
   - $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B} \wedge A \cap B \in \mathcal{B}$ und
   - $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \omega \setminus A \in \mathcal{B}$.

   Zeigen Sie: $A \in \mathcal{B}$ genau dann, wenn A eine endliche Vereinigung von d.r.e. Mengen ist.

Wenn jemand sich sehr für die Finite Injury Methode interessiert, sind hier noch einige Anregungen. Wir planen jedoch noch ein Blatt 9 mit leichteren Aufgaben.

5. (4 Bonus-Punkte) Zeigen Sie, dass es r.e. Turinggrade $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, gibt, so dass:

   $$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &\not\leq_T \mathbf{a}_2 \text{ und} \\ \mathbf{a}_2 &\not\leq_T \mathbf{a}_1 \text{ und} \\ \mathbf{a}_3 &\not\leq_T \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 \text{ und} \\ \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2 &\not\leq_T \mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

   Noch schwerere Frage: Könnte man sogar drei r.e. Grade $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ konstruieren, so dass die sechs Aussagen $\mathbf{a}_i \cup \mathbf{a}_j \not\leq_T \mathbf{a}_k$ und $\mathbf{a}_k \not\leq_T \mathbf{a}_i \cup \mathbf{a}_j$ für alle drei Wahlen $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ gleichzeitig gelten?

Bitte wenden

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, dem 10.07.2023.

6. (4 Bonus-Punkte) Zeigen Sie, dass es r.e. Turinggrade $\mathbf{a}_n$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_{n+1} \not\leq_T \mathbf{a}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{a}_n$ und $\mathbf{a}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{a}_n \not\leq_T \mathbf{a}_{n+1}$.

   Es gibt also unendliche viele r.e. Turinggrade.

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, dem 10.07.2023.