

**BLATT 6**  
(19.06.2023)

Wir erinnern an die Definition von  $D_u$ . Sei  $u = \sum_{i=0}^k 2^{n_i} \in \mathbb{N}$ . Wir setzen  $D_u = \{n_i \mid i \leq k\}$ .

Sei  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Für den Turinggrad von  $A$  schreiben wir  $\deg(A)$ , also  $\deg(A) = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid A \equiv_T B\}$ .

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{N}$  heißt *einfach* (simple), wenn sie r.e. ist und ihr Komplement keine unendliche r.e. Teilmenge hat, aber unendlich ist.

**Aufgabe 1** (5 Punkte).

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn  $A \leq_T B$ , so  $\overline{A} \leq_T B$ .
- (b) Wenn  $A \leq B$ , so  $A \leq_T \overline{B}$ .
- (c)  $\deg(A) = \deg(\overline{A})$ .
- (d)  $\mathfrak{o}' = \deg(K)$  enthält auch nicht rekursiv aufzählbare Mengen. Die Menge  $K$  ist das Halteproblem.

**Aufgabe 2** (5 Punkte).

Seien  $A, B$  r.e. Es gebe eine rekursive Relation  $R$ , so dass für alle  $x$ :

$$x \in A \leftrightarrow \exists u \exists z (D_u \subseteq B \wedge R(x, u, z)).$$

Gilt dann  $A \leq_T B$ ?

**Aufgabe 3** (6 Punkte).

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn  $A$  einfach ist, so hat  $A$  keine ko-unendliche rekursive Obermenge.
- (b) Wenn  $A$  keine ko-unendliche rekursive Obermenge hat, so ist  $A$  einfach.
- (c) Die einfachen Mengen sind gegen endliche Durchschnitte abgeschlossen.
- (d) Wenn  $A$  einfach ist und  $W_x$  unendlich ist, so ist  $A \cap W_x$  unendlich.

**Aufgabe 4** (Bonus 4 Punkte).

Schwerere Aufgabe. Gibt es eine einfache Menge?

Man kann auch Seite 109 in Robert Soare, *Turing Computability* konsultieren.