Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Francesco Gallinaro

BLATT 3

(22.05.2023)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
$A \subseteq \mathbb{N}$ heißt Differenz von r.e. Mengen, wenn es r.e. B, C gibt, so dass $A = B \setminus C$.

(a) Ist die Menge der Differenzen von r.e. Mengen gegen endliche Schnitte abgeschlossen?

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $\{e : W_e = \{0, \ldots, n-1\}\}$ eine Differenz von r.e. Mengen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine partielle rekursive Funktion und sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar. Ist $\varphi(A) = \{\varphi(a) : a \in A\}$ r.e.? Wie steht es mit dem Urbild $\varphi^{-1}(A) = \{b \in \mathbb{N} : \varphi(b) \in A\}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathrm{Tot} = \{x : W_x = \mathbb{N}\}$ und $K = \{x : x \in W_x\}$. Ist Tot r.e?

Hinweis: Könnten Sie aus einer rekursiven Aufzählung von Tot eine rekursive Aufzählung von $\mathbb{N} \setminus K$ herstellen? Ist $\mathbb{N} \setminus K$ r.e.?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $X = W_e$, $Y = W_f$, $X^s = W_{e,s} = \mathrm{dom}(\varphi_{e,s})$, $Y^s = W_{f,s}$.

Wir definieren
$X \searrow Y := \{n : (\exists s)(n \in X^s \setminus Y^s)\}$, und
$X \downarrow Y := (X \searrow Y) \cap Y$.
(Entschuldigung für die hässlichen Zeichen.)

(a) Sind die beiden Mengen r.e.?

(b) Ist $X \searrow Y = (X \setminus Y) \cup X \downarrow Y$?

(c) Nun sei $X \downarrow Y$ endlich. Ist dann auch $X \setminus Y$ r.e.?

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, dem 05.06.2023, um 16:15 Uhr.