BLATT 1

(18.4.2023)

Aufgabe 1. Eine Menge (oder eine Klasse) A heißt *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ gilt, also wenn aus $x \in A$ und $y \in x$ auch $y \in A$ folgt.

a) Ist $\emptyset$ transitiv?

b) Sei x transitiv und $y \subseteq x$. Ist dann $x \cup \{y\}$ transitiv?

c) Sei A eine nicht leere Menge transitiver Mengen. Sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv?

Aufgabe 2. Eine Relation R auf einer Menge oder Klasse A heißt *konnex*, wenn für alle $x, y \in A$ entweder $x \in y$ oder $y \in x$ oder $x = y$ gilt. Geben Sie eine transitive Menge an, auf der $\in$ nicht konnex ist. Finden Sie ein Beispiel mit nur drei Klammerpaaren?

Aufgabe 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Operation $\bigcup^{(n)}$ rekursiv wie folgt:

- $\bigcup^{(0)} x = x$,
- $\bigcup^{(n+1)} x = \bigcup(\bigcup^{(n)} x)$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine Menge x an, so dass $\bigcup^{(n+1)} x = \emptyset$ und $\bigcup^{(n)} x \neq \emptyset$.

b) Finden Sie eine nichtleere Menge x mit $\bigcup x = x$?

c) Sei x eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die Menge $\bigcup\{\bigcup^{(n)} x \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ transitiv ist.

Aufgabe 4. Seien R eine Äquivalenzrelation auf einer echten Klasse A und T ein Repräsentantensystem von R, d.h., T enthält aus jeder R-Klasse genau ein Element. (Die Existenz eines solchen T folgt aus eine Verstärkung von AC, die Global Choice heißt.) Zeigen Sie, dass (a) oder (b) gilt:

(a) T ist eine echte Klasse;

(b) Es gibt ein $w \in A$, so dass $w/R := \{u \in A \ : \ wRu\}$ eine echte Klasse ist.

Man gebe Beispiele an, bei denen

- (a) und (b) bzw.,
- (a) und nicht (b),
- (b) und nicht (a)

gelten.

Abgabe bis Dienstag 25.4.2023, 10 Uhr.