Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 1

(25.4.2023)

Aufgabe 1.

a) Wir definieren $[x, y, z] = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Gilt

$$\forall x \forall y \forall z \forall x' \forall y' \forall z' \; ([x, y, z] = [x', y', z'] \leftrightarrow (x = x' \wedge y = y' \wedge z = z')) \quad ?$$

b) Wir definieren $\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$. Gilt

$$\forall x \forall y \forall z \forall x' \forall y' \forall z' \; (\langle x, y, z\rangle = \langle x', y', z'\rangle \leftrightarrow (x = x' \wedge y = y' \wedge z = z')) \quad ?$$

Aufgabe 2. Es sei $(a, <)$ eine Wohlordnung. Sei $a^{<\omega} := \{f \;:\; \exists n \in \omega \; f : n \to a\}$. Hierbei sind die von Neumann'schen Zahlen gemeint: $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Wir schreiben $n = \mathrm{dom}(f)$, wenn $f \colon n \to V$. Wir definieren:

- $f \leq_{\mathrm{lex}} g$, falls $f \subseteq g$ (als Graphen, man kann äquivalent auch $f = g \restriction \mathrm{dom}(f)$ schreiben) oder $\exists i \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ mit $f(i) < g(i) \wedge f \restriction i = g \restriction i$.
- $f \leq_2 g$, falls $\mathrm{dom}(f) < \mathrm{dom}(g)$ oder $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge f \leq_{\mathrm{lex}} g$.

a) Ist $(a, \leq_{\mathrm{lex}})$ eine Wohlordnung?

b) Ist $(a, \leq_2)$ eine Wohlordnung?

4 Bonuspunkte: Wir starten nun mit $(a, <) = (\omega, \in)$. Bestimmen Sie den Isomorphietyp der jeweiligen Ordnung. Sie können zum Beispiel einen bekannten Vertreter der Isomorphieklasse angeben. Für b) kann man sich entlang der $\mathrm{dom}(f)$ orientieren. Für a) kann man zum Beispiel das Skript durchforsten (man schaue bei ordinaler Exponentiation).

Aufgabe 3.

a) Geben Sie ein Beispiel zweier nicht isomorpher linearer Ordnungen (A, R) und (B, S), so dass weder (A, R) ein echtes Anfangsstück von (B, S) noch (B, S) ein echtes Anfangsstück von (A, R) ist.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Kette von Wohlordnungen $(A_n, R_n)_{n \in \omega}$, so dass für alle n die Wohlordnung (A_n, R_n) eine algebraische Substruktur von (A_{n+1}, R_{n+1}) ist und trotzdem $(\bigcup_n A_n, \bigcup_n R_n)$ keine Wohlordnung ist.
Definition oder Erinnerung: (A_n, R_n) ist eine algebraische Substruktur von (A_{n+1}, R_{n+1}), falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $R_{n+1} \cap (A_n \times A_n) = R_n$.

Aufgabe 4. Es sei A eine Menge von nicht-leeren Mengen und $(\bigcup A, <)$ eine Wohlordnung.
Definieren Sie eine Auswahlfunktion f auf A, d.h. zeigen Sie ohne Benutzung des Auswahlaxioms, dass es eine Auswahlfunktion auf A gibt.

Abgabe bis Dienstag 2.5.2023, 10 Uhr.