Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 3
(2.5.2023)

Eine Menge A heißt *Dedekind-unendlich,* wenn es eine Bijektion von A auf eine echte Teilmenge von A gibt.
Eine Menge A heißt *endlich*, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion zwischen n und A gibt.
Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie nicht endlich ist. Insbesondere könnte sie auch zu gar keiner Ordinalzahl bijektiv sein.

Aufgabe 1. Arbeiten Sie in ZFC.

a) Ist jede Dedekind-unendliche Menge unendlich?

b) Ist jede unendliche Menge Dedekind-unendlich?

Wo benutzen Sie das Auswahlaxiom?

Aufgabe 2. Eine Ordinalzahl α ist eine *Limeszahl*, wenn $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \beta+1$ für alle Ordinalzahlen β.

a) Ist α genau dann eine Limeszahl, wenn ($\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha = \bigcup \alpha$)?

b) Nun sei α eine Limeszahl. Ist dann $\alpha = \bigcup\{\beta + 1 : \beta \in \alpha\}$?

Eine Relation $(\mathbf{A}, \mathbf{R})$ heißt *mengenähnlich*, falls für jedes $a \in \mathbf{A}$, $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, a, \mathbf{R})$ eine Menge ist. $(\mathbf{A}, \mathbf{R})$ heißt *fundiert*, falls jede nicht leere Teilmenge von $\mathbf{A}$ ein $\mathbf{R}$-minimales Element hat.

Aufgabe 3. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ und sei $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ die folgende Relation:

$$\langle x, y\rangle \mathbf{R} \langle z, u\rangle :\Leftrightarrow ((x \in z \wedge y = u) \vee (x = z \wedge y \in u)).$$

a) Ist $\mathbf{R}$ mengenähnlich auf $\mathbf{A}$?

b) Ist $\mathbf{R}$ fundiert auf $\mathbf{A}$?

Sei $F \colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ ein Funktional.

F heißt *stetig*, falls für jede Limeszahl λ die Gleichung $F(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ gilt.

F heißt *monoton wachsend*, falls $F(\alpha) < F(\beta)$ für alle $\alpha < \beta$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jedes stetige monoton wachsende Funktional $F : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ unbeschränkt viele Fixpunkte hat, d.h. für alle $\alpha_0 \in \mathbf{On}$ gibt es ein $\alpha \geq \alpha_0$, so dass $F(\alpha) = \alpha$.

Abgabe bis Dienstag 9.5.2023, 10 Uhr.