# BLATT 4

(9.5.2023)

Sei $X \in \mathbf{V}$ eine Menge. Wir definieren die folgenden Varianten des Auswahlaxioms:

$\mathrm{AC}_\omega(X)$ (*Abzählbare Auswahl auf* $X$): Für alle $\{P_n : n \in \omega\}$ mit $(P_n \subseteq X \wedge P_n \neq \emptyset)$, gibt es eine Funktion $f : \omega \to \mathbf{V}$, so dass $\forall n \in \omega(f(n) \in P_n)$.

$\mathrm{DC}(X)$ (*Abhängige Auswahl auf* $X$): Für jedes $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X \exists y \in X((x, y) \in R)$, gibt es eine Folge $\langle x_n : n \in \omega \rangle$, so dass $\forall n \in \omega((x_n, x_{n+1}) \in R)$.

$\mathsf{AC}_\omega$ (*Abzählbare Auswahl*): Für alle Mengen $X$ gilt $\mathsf{AC}_\omega(X)$.

$\mathsf{DC}$ (*Abhängige Auswahl, dependent choice(s)*): Für alle nicht leeren Mengen $X$ gilt $\mathsf{DC}(X)$.

**Aufgabe 1.** Seien $X$ und $Y$ zwei Mengen, sodass es eine surjektive Funktion $f : Y \to X$ gibt.

a) Gilt die Implikation $\mathrm{AC}_\omega(Y) \to \mathrm{AC}_\omega(X)$ in $\mathsf{ZF}$?

b) Gilt die Implikation $\mathrm{DC}(Y) \to \mathrm{DC}(X)$ in $\mathsf{ZF}$?

**Bonus-Aufgabe.** Zeigen Sie, dass die folgenden Implikationen gelten:

i) $\mathsf{AC} \to \mathsf{DC}$

ii) $\mathsf{DC} \to \mathsf{AC}_\omega$

**Aufgabe 2.** Sei $\langle V_\alpha : \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ die von Neumann-Hierarchie und $\mathbf{WF} = \bigcup V_\alpha$. Seien $x, y \in \mathbf{WF}$.

a) Zeigen Sie, $\mathrm{rk}(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$.

b) Berechnen Sie die folgenden Ränge in Abhängigkeit von $\mathrm{rk}(x)$ und $\mathrm{rk}(y)$ für beliebige $x$ und $y$ :

i) $\mathrm{rk}(\mathcal{P}(x))$,
ii) $\mathrm{rk}(\{x\})$,
iii) $\mathrm{rk}(x \times y)$,
iv) $\mathrm{rk}(\bigcup x)$.

**Aufgabe 3.** Welche Axiome aus ZFC gelten in $V_\omega$?

**Rückseite beachten!**

Abgabe bis Dienstag 16.5.2023, 10 Uhr.

**Aufgabe 4.** Die $\aleph$-Universität: Die Anforderungen um an der $\aleph$-Universität zu promovieren, sind lediglich die Kurse $\boxed{\sigma}$, für jedes $\sigma \in \omega^{<\omega}$. Die Voraussetzungen für $\boxed{\sigma}$ sind alle Kurse $\boxed{\tau}$, für ein $\tau$, dass aus $\sigma$ entsteht, wenn man einen Eintrag $n$ aus $\sigma$ durch eine endliche (möglicherweise auch leere) Folge von natürlichen Zahlen echt kleiner $n$ ersetzt. So lehrt Sie z.B. $\boxed{2,1,7,1}$ alles über die Folge $(2,1,7,1)$, und hat als Voraussetzung unter anderem $\boxed{1,7,1}$, $\boxed{0,1,1,0,1,7,1}$, $\boxed{2,1,5,5,4,0,1,1}$.
$\boxed{\phantom{x}}$ lehrt Sie alles über die leere Folge $\emptyset$ und besitzt keine Voraussetzungen.

1. Zeigen Sie, dass die Relation $(\tau, \sigma) \in R :\Leftrightarrow \boxed{\tau}$ ist Voraussetzung von $\boxed{\sigma}$, fundiert ist; d.h. Sie können in ordinal vielen Semestern promovieren.

2. Berechnen Sie die Rangfunktion $\mathrm{rk}_R : \omega^{<\omega} \to \mathbf{On}$ von $R$, wobei $\mathrm{rk}_R(x)$ das erste Semester angibt, in dem Sie frühestens Kurs $\boxed{x}$ belegen können. Es ist nicht möglich, in einem Semester zwei Kurse zu belegen, die aufeinander aufbauen.

*Hinweis:* Da eine Rangfunktion nützlich ist, um Fundiertheit zu zeigen, können Sie auch zuerst den zweiten Aufgabenteil bearbeiten.