BLATT 6
(23.5.2023)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Gibt es eine absteigende Folge $\kappa \supseteq x_0 \supseteq x_1 \supseteq \dots$ von Teilmengen von κ, sodass $|x_n| = |\kappa|$ für jedes $n < \omega$ und $\bigcap_{n<\omega} x_n = \emptyset$ gilt?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Seien $\kappa \geq \lambda \geq \omega$ und $f : \kappa \to \lambda$ gegeben. Was ist eine hinreichende Bedingung, damit es ein $\alpha < \lambda$ gibt, sodass $|f^{-1}{}''\{\alpha\}| = \kappa$? Folgende Antworten scheinen denkbar:

i) $\kappa > \lambda$,

ii) $\kappa > \mathrm{cf}(\lambda)$,

iii) $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$,

iv) $\mathrm{cf}(\kappa) > \mathrm{cf}(\lambda)$.

Geben Sie zu jeder der vier Möglichkeiten einen Beweis, wenn die Aussage stimmt, bzw. ein Gegenbeispiel, wenn sie falsch ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Eine Kardinalzahl κ heißt *unerreichbar*, falls sie regulär und überabzählbar ist und für alle $\alpha < \kappa$ auch $2^\alpha < \kappa$ gilt. Folgt aus ZFC die Existenz von unerreichbaren Kardinalzahlen?

Hinweis: Betrachten Sie V_κ in der von Neumann-Hierarchie und denken Sie an die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze.

Abgabe bis Dienstag 6.6.2023, 10 Uhr.