Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: M.Sc. Christian Bräuninger

BLATT 9

(27.6.2023)

Aufgabe 1. Es sei M ein abzählbares, transitives Modell eines genügend großen Fragmentes von ZFC, $\mathbb{P} \in M$ eine nicht-leere Halbordnung und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M. Seien außerdem $p, q, r \in \mathbb{P}$. Wir definieren einen $\mathbb{P}$-Namen

$$\tau := \{\langle \emptyset, p\rangle, \langle \{\langle \emptyset, q\rangle\}, r\rangle\}.$$

Berechnen Sie τ_G für alle 8 Möglichkeiten, je nachdem, ob die Bedingungen p, q, r Elemente von G sind oder nicht.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{P}$ eine nicht-leere Halbordnung.

a) Nehmen Sie an, dass $\mathbb{P}$ keine Atome hat. Gibt es eine unendliche Antikette?

b) Angenommen, $\mathbb{P}$ besitzt für jedes $n < \omega$ eine Antikette mit mindestens n Elementen. Hat $\mathbb{P}$ dann eine unendliche Antikette?

Die Elemente von Bäumen heißen meistens Knoten (nodes). Wir betrachten nun Bäume, deren Knoten endliche Mengen sind. Es gibt auch Bäume mit endlichen Folgen als Knoten, diese sind jedoch hier nicht gemeint. Eine nicht-leere Teilmenge $T \subseteq [\omega]^{<\omega}$ heißt *Baum*, falls für alle $s \in T$ und alle $n \in \omega$ auch $s \cap n \in T$ gilt. Die Elemente von T heißen *Knoten* und für $s, t \in T$ sagen wir, dass s ein Anfangsstück von t ist und schreiben $s \trianglelefteq t$, falls $s = \emptyset$ oder $s = t \cap (\max(s) + 1)$. Ein Knoten $s \in T$ heißt *Stamm von T*, wenn für alle $t \in T$ entweder $t \trianglelefteq s$ oder $s \trianglelefteq t$ gilt und s maximal mit dieser Eigenschaft ist.
Ein Baum heißt *superperfekt*, falls es für jedes $s \in T$ ein $t \in T$ und ein $A \in [\omega]^\omega$ gibt, sodass $s \trianglelefteq t$ und $t \cup \{n\} \in T$ für alle $n \in A$ gilt. Insbesondere besitzen alle superperfekten Bäume einen Stamm.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Halbordung $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{PT}}) = (\mathbb{PT}, \subseteq) \in M$, d.h., $q \leq_{\mathbb{PT}} p$, falls $p, q \in \mathbb{PT}$ und $q \subseteq p$ und einen $\mathbb{PT}$-generischen Filter G über M. Zeigen Sie, dass $\bigcup G$ eine unendliche Teilmenge von ω ist.
Hinweis : Betrachten Sie Mengen der Form

$$D_n = \{p \in \mathbb{PT} \ : \ \text{Der Stamm von } p \text{ hat mindestens } n \text{ Elemente}\}.$$

Freiwillige Knobelaufgabe: Ist $\bigcup G \in M$? Betrachten Sie hierzu $x \in [\omega]^\omega \cap M$. Gibt es für dieses spezifische x eine dichte Menge aus Bedingungen, die Anfangsstücke von $\bigcup G$ geeignet festlegen?

Rückseite beachten!

Abgabe bis Dienstag 4.7.2023, 10 Uhr.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Halbordnung $\mathbb{P} = \{p \ : \ \exists n \ p : n \to 2\}$ der endlichen Folgen auf 2 geordnet durch $q \leq p \Leftrightarrow q \supseteq p$.
Eine Antikette $A \subseteq \mathbb{P}$ heißt *Front*, falls für alle $f : \omega \to 2$ ein $n \in \omega$ existiert, sodass $f \restriction n \in A$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ unendliche Antiketten besitzt.

b) Gibt es eine Antikette in $\mathbb{P}$, die keine Front sind?

c) Gibt es eine Antikette in $\mathbb{P}$, welche auch eine Front ist?

Bonus-Aufgabe. Beim zweiten Schritte in der Bereitstellung der abzählbaren transitiven Modelle haben wir auf den "Satz von Löwenheim und Skolem abwärts" zurückgegriffen. Hier ist ein Beweis zum Selbermachen.

Es sei $\mathcal{A} = (A, (R^{\mathcal{A}})_{R \in \tau})$ eine Struktur mit abzählbarer Sprache τ, zum Beispiel $\mathcal{A} = (V_\beta, \in)$. Sei außerdem $<$ eine Wohlordnung auf A und $\emptyset \neq B \subseteq A$ abzählbar. Wir definieren rekursiv $B_0 = B$ und

$$\begin{aligned} B_{k+1} = \{<\text{-}\min\{b \in A \ : \ \mathcal{A} \models \varphi(b, \bar{b})\} \ : \ & \bar{b} \text{ ist ein n-Tupel von Elementen aus } B_k \\ & \text{und } \varphi \text{ ist eine } \tau\text{-Formel mit } \mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, \bar{b})\}. \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir $\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \omega} B_k \prec \mathcal{A}$.
Zeigen Sie, dass die Struktur $\mathcal{B}$ abzählbar ist und dass $\mathcal{B} \prec_n \mathcal{A}$ für alle $n \in \omega$ gilt. Man kann zum Beispiel induktiv über k zeigen, dass für alle $n \leq k$, $B_k \prec_n \mathcal{A}$.