BLATT 11, letztes Blatt des Sommersemesters
(11.7.2023)

Aufgabe 1 (2 Bonuspunkte)**.** Es sei M ein abzählbar transitives Modell. Finden Sie eine Halbordnung $\mathbb{P}$ und einen $\mathbb{P}$-generischen Filter mit $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)**.** Es seien M ein abzählbar transitives Modell, $\mathbb{P} \in M$ eine atomlose Halbordnung und G, H zwei verschiedene $\mathbb{P}$-generische Filter über M. Kann es einen Satz φ aus der Forcingsprache geben, so dass $M[G] \models \varphi$ und $M[H] \models \neg\varphi$?
Falls ja, geben Sie ein Beispiel $\mathbb{P}$, G, H und φ an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Freiwilliger Zusatz (ohne Bepunktung): Sie können darüber nachdenken, welche Eigenschaften von $\mathbb{P}$ für die Existenz oder Nicht-Existenz so eines Beispiels G, H, φ eine Rolle spielen.

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte)**.** Es sei M ein abzählbar transitives Modell. Wir betrachten die Halbordnung $\mathbb{P} = ([\omega]^\omega, \subseteq)$ und einen $\mathbb{P}$-generischen Filter G über M. Zeigen Sie, dass G ein Ultrafilter in $M[G]$ ist, d.h. für alle $A \in M[G]$ mit $M[G] \models A \subseteq \omega$ ist entweder $A \in G$ oder $\omega \setminus A \in G$.

Hinweis: Man kann zum Beispiel zeigen: Für alle $A \in M \cap \mathcal{P}(\omega)$ gilt: $A \in G$ oder $\omega \setminus A \in G$. Dann kann man sich überlegen, ob es $A \in \mathcal{P}(\omega) \cap (M[G] \setminus M)$ gibt.

Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte)**.** Wir nehmen ZFC und CH an.

a) Geben Sie das kleinste κ an, sodass $\mathrm{Fn}(\omega_1, 2, <\omega_1)$ die κ-c.c. hat.

b) Geben Sie das kleinste λ an, sodass $\mathrm{Fn}(\omega_1, \lambda, <\omega_1)$ nicht die κ-c.c. für das κ aus Teil a) hat.

Abgabe bis Dienstag 18.7.2023, 10 Uhr.