Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 1 vom 16.4.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 23.04.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors.

1. Es sei $S = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \boxplus, \circ, \mathtt{P}, \lhd\}$; dabei seien $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ Konstantenzeichen, $\boxplus, \circ$ zweistellige Funktionszeichen und $\mathtt{P}$ ein einstelliges und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als S-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:

$$\mathtt{0}^{\mathfrak{N}} = 0,\ \mathtt{1}^{\mathfrak{N}} = 1,\ \boxplus^{\mathfrak{N}} = +,\ \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot,\ \mathtt{P}^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid\ p \text{ ist Primzahl}\},\ \lhd^{\mathfrak{N}} = <$$

Drücken Sie folgende Aussagen als S-Formeln aus:

(a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.

(b) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

(d) Es gibt genau eine gerade Primzahl.

(e) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w (z = x \boxplus v \land y = z \boxplus w)$?

(f) Gilt $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w ((z = x \boxplus v \land y = z \boxplus w)) \lor (z = y \boxplus w \land x = z \boxplus w))$?

2. Wir definieren die Menge der K-Terme über $\{[,]\}$ durch folgende Regeln:

(i) Das leere Wort $\square$ ist ein K-Term.

(ii) Falls v, w K-Terme sind, so ist $[vw]$ ein K-Term.

(a) Ist das Wort $[\,][\,]$ ein K-Term? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir definieren F: Menge der K-Terme $\to \mathbb{N}$ durch folgende Regeln:

$$F(\square) := 0$$
$$F([vw]) := 1 + \max\{F(v), F(w)\}.$$

Ist die Funktion F wohldefiniert?

Bitte wenden.

3. Seien $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine nicht leere Teilmenge von A. Die Menge B enthalte die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten und sei unter allen Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschränkt, erhält man eine L-Struktur $\mathfrak{B}$. Die L-Struktur $\mathfrak{B}$ heißt *Unterstruktur von* $\mathfrak{A}$.

(a) Ist der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$, falls er nicht leer ist, wieder eine Unterstruktur?

Aus einer positiven Antwort würde folgen, dass jede nicht leere Teilmenge S von A in einer kleinsten Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ (als Teilmenge) enthalten ist, der *von S erzeugten* Unterstruktur.

(b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

4. In der Sprache $\mathcal{L} := \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen sowie $<$ ein zweistelliges Relationszeichen.

(a) Wir betrachten die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$, welche als Universum $\mathbb{Z}$ besitzen, mit den Interpretationen $c^{\mathfrak{A}_0} := 5$ und $c^{\mathfrak{A}_1} := -9$ sowie $<^{\mathfrak{A}_0}$ und $<^{\mathfrak{A}_1}$ als übliche Ordnung of $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(b) Es sei $\mathfrak{A}_2$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und den Interpretationen $c^{\mathfrak{A}_2} := -3$ sowie $<^{\mathfrak{A}_2} := >$, also $n <^{\mathfrak{A}_2} m$ genau dann, wenn $m < n$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_2$ ebenfalls isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(c) Wir erweitern $\mathcal{L}$ zur Sprache $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{d\}$, wobei d ein weiteres Konstantenzeichen sei. Aus $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ machen wir $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathfrak{A}'_0$ und $\mathfrak{A}'_1$, indem wir

$$d^{\mathfrak{A}'_0} := 0 =: d^{\mathfrak{A}'_1}$$

setzen. Sind $\mathfrak{A}'_0$ und $\mathfrak{A}'_1$ isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?