Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 2 vom 23.4.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 30.04.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors.

1. Zwei L-Strukturen heißen elementar äquivalent, wenn sie dieselben L-Sätze erfüllen.

(a) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?

(b) Ist $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +)$?

(c) Ist $(\mathbb{Z}, +)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +)$?

2. Es sei $L = \{\oplus, \otimes, \ominus, c_0, c_1, \triangleleft\}$ eine Sprache, wobei $\oplus$ und $\otimes$ zweistellige und $\ominus$ ein einstelliges Funktionszeichen, c_0 und c_1 Konstantenzeichen sowie $\triangleleft$ ein zweistelliges Relationszeichen seien. Es sei $\mathfrak{A}$ die L-Struktur mit Universum $\mathbb{Q}$, sodass $\oplus^{\mathfrak{A}} = +$, $\otimes^{\mathfrak{A}} = \cdot$, $\ominus^{\mathfrak{A}} = -$ (also die Funktion $x \mapsto -x$), $c_0^{\mathfrak{A}} = 0$, $c_1^{\mathfrak{A}} = 1$ und $\triangleleft^{\mathfrak{A}} =<$. Es seien β_0 sowie β_1 Belegungen derart, dass $\beta_0(v_i) = 2i$ und $\beta_1(v_i) = 2i + 1$.

(a) Berechnen Sie die Auswertung $t^{\mathfrak{A}}[\beta_i]$ für $i = 0, 1$ und die folgenden L-Terme:

(i) $t := \otimes c_1 \oplus c_0 \oplus \ominus c_1 c_0$

(ii) $t := \oplus \otimes v_1 v_3 \ominus v_2$.

(b) Wir definieren $\varphi := \exists v_2 \oplus v_2 v_2 = v_1$ sowie $\psi := \triangleleft \oplus c_0 c_1 \oplus c_1 c_1$.

(i) Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta_i]$, $i = 0, 1$?

(ii) Gilt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta_i]$, $i = 0, 1$?

3. Es sei L eine Sprache, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei isomorphe L-Strukturen sowie $F\colon A \to B$ ein Isomorphismus. Gegeben eine A-Belegung $\beta\colon \{v_0, \dots\} \to A$ sei β_F definiert durch $\beta_F(v_i) = F(\beta(v_i))$ die durch F induzierte B-Belegung.

(a) Zeigen Sie durch Induktion über den Formelaufbau, dass für jeden L-Term t sowie jede A-Belegung β gilt:

$$F(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[\beta_F]$$

(b) Folgern Sie, dass für jede L-Formel φ und jede A-Belegung β gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\beta_F]$$

(c) Folgern Sie weiter, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind.

4. Es sei $L = \{c, f, R\}$, wobei c ein Konstantenzeichen, f ein zweistelliges Funktionszeichen sowie R ein zweistelliges Relationszeichen seien. Wir betrachten folgende L-Formel:

$$\varphi := (\forall v_2(Rv_2v_0 \wedge \exists v_3\forall v_1\,(fv_3v_5 = v_3 \to Rcv_5)) \vee \exists v_1v_2 = ffv_1cv_5)$$

(a) Welche Variablen sind frei in φ?

(b) Welche Variablen in φ sind frei für den Term $t := fv_0fcv_2$?

(c) Finden Sie eine zu φ logisch äquivalente Formel, in der jede Variable nur durch einen Quantor quantifiziert wird.

(d) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass die Folgerung im Substitutionslemma nicht für die L-Formel $\psi := \exists v_0(v_3 = fv_0c)$ und die Ersetzung von v_3 durch t gilt.