Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 3 vom 30.4.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 07.05.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. Führen Sie, falls möglich, die Beweise in dieser Aufgabe strikt mithilfe der Regeln des Hilbertkalküls für $\vdash$.

(a) Gilt $\vdash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$?

(b) Gilt $\vdash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$?

2. (8 Punkte) Es seien gegeben eine Sprache L und eine L-Struktur $\mathfrak{A}$. Wir nehmen ein $a \in A$ sowie ein $b \notin A$ und betrachten $B := A \cup \{b\}$. Wir definieren eine L-Struktur $\mathfrak{B}$ mit Grundmenge B wie folgt:

- Für jedes Konstantenzeichen $c \in L$ sei $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}}$.
- Für jedes Relationszeichen $R \in L$ und jedes $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in B^n$ sei $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in R^{\mathfrak{B}}$ genau dann, wenn $(b'_0, \ldots, b'_{n-1}) \in R^{\mathfrak{A}}$, wobei

$$b'_i := \begin{cases} b_i & b_i \neq b \\ a & b_i = b \end{cases}$$

- Für jedes Funktionszeichen $f \in L$ und jedes $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in B^n$ sei $f^{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = f^{\mathfrak{A}}(b'_0, \ldots, b'_{n-1})$, wobei die b'_i wie oben definiert werden.

Gegeben eine Belegung $\beta' \colon \{v_0, v_1, \ldots\} \to B$ definieren wir die Belegung $\beta \colon \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$ durch

$$\beta(v_i) = \begin{cases} \beta'(v_i) & \beta'(v_i) \neq b \\ a & \beta(v_i) = b \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(L)$ die Menge der L-Formeln. Die Menge $\mathcal{L}^-(L)$ ist definiert wie $\mathcal{L}(L)$ mit dem Unterschied, dass die einzigen atomaren Formeln die Form $Rt_0 \ldots t_{n-1}$ für ein Relationszeichen $R \in L$ haben (d.h., wir erlauben keine Gleichheitsformeln).

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{L}^-(L)$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B} \models \varphi[\beta']$$

(b) Ist (a) noch wahr, wenn φ auch in $\mathcal{L}(L)$ sein kann?

(c) Wir betrachten ein spezielles zweistelliges Relationszeichen $E \in L$. Gibt es eine Menge $T \subseteq \mathcal{L}^-(L)$, sodass für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, dass $\mathfrak{A} \models T$ genau dann, wenn $E^{\mathfrak{A}}$ die Gleichheit ist (d.h. es gilt $E^{\mathfrak{A}}xy$ genau dann, wenn $x = y$)?

3. Es sei $L := \emptyset$. Wir schreiben $|A|$ für die Anzahl der Elemente von A.

(a) Gibt es eine L-Aussage φ, sodass für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $|A| \geq k$? Wie sieht es mit $|A| = k$ aus?

(b) Gibt es eine Menge T von L-Aussagen, sodass für jede L-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt, dass $\mathfrak{A} \models T$ genau dann, wenn A unendlich ist?