Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 3 vom 07.5.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 14.05.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt *Spektrum*, wenn es eine Sprache L sowie eine L-Formel φ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $n \in S$ genau dann, wenn es eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ mit n-elementigem Universum gibt, sodass $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(a) Ist jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Spektrum?

(b) Ist die Menge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein Spektrum?

(c) Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, die kein Spektrum ist?

(d) (Ohne Bepunktung) Sind folgende Mengen Spektren?

(i) $S_0 := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \exists k\ n = k^2\}$

(ii) $S_1 := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \exists p \text{ prim } \exists k\ \ n = p^k\}$ (Nur für Personen, die bereits eine Algebra-Vorlesung gehört haben)

(iii) $S_2 := \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \exists k\ n = 2^k\}$

2. Es sei L eine Sprache sowie T eine L-Theorie. Wir sagen, T *hat ein Modell aus Konstanten*, wenn es $\mathfrak{A} \models T$ gibt, sodass es für alle $a \in A$ ein Konstantenzeichen $c \in L$ gibt, sodass $a = c^{\mathfrak{A}}$.

(a) Es sei $L = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, jedes c_n ein Konstantenzeichen. Es sei T eine $\emptyset$-Theorie (und damit eine L-Theorie), die nur unendliche Modelle besitzt (die Existenz dieser Theorie folgt aus Blatt 3, Aufgabe 3). Hat T ein Modell aus Konstanten?

(b) Gibt es eine Sprache L, die unendlich viele Konstantenzeichen umfasst und eine L-Theorie T, die kein Modell aus Konstanten besitzt?

3. Es sei L eine Sprache. Eine L-Formel ψ ist in *pränexer Normalform*, wenn sie die Form

$$Qv_{i_0}Qv_{i_1}\dots Qv_{i_{n-1}}\varphi$$

hat, wobei jedes Q ein Quantor (also $\exists$ oder $\forall$) ist und φ keine Quantoren enthält. Zeigen Sie: Für jede Formel ψ gibt es eine Formel ψ' derart, dass ψ' in pränexer Normalform und äquivalent zu ψ ist.

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

4. Es sei L eine Sprache und ψ eine L-Formel der Form

$$\forall x \exists y \varphi.$$

Es seien β eine A-Belegung und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur derart, dass $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$ und f ein einstelliges Funktionszeichen, $f \notin L$. Zeigen Sie: Wir können $\mathfrak{A}$ zu einer $L' := L \cup \{f\}$-Struktur erweitern, sodass

$$\mathfrak{A} \models \forall x \varphi(\frac{f(x)}{y})[\beta].$$

Freiwilliger Zusatz: Überlegen Sie sich, wie man mithilfe solcher Spracherweiterungen alle Existenzquantoren in Formeln eliminieren kann.