Übungsblatt 3 vom 14.5.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 28.05.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. (3 Punkte) Zeigen Sie: Es gibt keine Sprache L, sodass eine L-Theorie T existiert, sodass $\mathfrak{A} \models T$ genau dann, wenn A, das Universum von $\mathfrak{A}$, endlich ist.
Hinweis: Denken Sie an den Kompaktheitssatz.

2. (3 Punkte) Es sei $L := \{\oplus, \otimes, c_0, c_1, \lhd\}$ und $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ eine L-Struktur (bei üblicher Interpretation). Zeigen Sie: Es gibt eine L-Struktur $\mathfrak{M}$, sodass $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ elementar äquivalent sind und ein $r \in \mathfrak{M}$ existiert mit der Eigenschaft, dass $r > 1 + \dots + 1$ (n-fache Addition) für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Kompaktheit!

Definition: Es sei X eine Menge. Eine Relation $E \subseteq X \times X$ ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn E reflexiv (d.h. $(x, x) \in E$ für alle $x \in X$), transitiv (d.h. wenn $(x, y) \in E$ und $(y, z) \in E$, so auch $(x, z) \in E$) und symmetrisch (d.h. wenn $(x, y) \in E$, ist auch $(y, x) \in E$) ist. Für $x \in X$ ist die *Äquivalenzklasse* von x, geschrieben $[x]_E$, definiert als

$$[x]_E := \{y \in X \mid (x, y) \in E\}$$

3. (10 Punkte) Es sei $L := \{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei jedes R_n ein zweistelliges Relationszeichen sei. Es sei T eine L-Theorie, sodass jede L-Struktur $\mathfrak{A} = (A, (E_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $\mathfrak{A} \models T$ folgende Eigenschaften hat:

(i) Jedes E_n ist eine Äquivalenzrelation.
(ii) E_0 besitzt unendlich viele Äquivalenzklassen.
(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$: Wenn $(x, y) \in E_{n+1}$, so auch $(x, y) \in E_n$.
(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$: Jede Äquivalenzklasse $[x]_{E_n}$ enthält unendlich viele E_{n+1}-Äquivalenzklassen.

Zeigen Sie:

(a) Solch ein T existiert (d.h., geben Sie eine konkrete Axiomatisierung von T an).
(b) T ist konsistent.
(c) Wenn $\mathfrak{A} = (A, (E_n)_{n \in \mathbb{N}}) \models T$, $\mathfrak{B} = (B, (F_n)_{n \in \mathbb{N}}) \models T$ und $k \in \mathbb{N}$, so sind $\mathfrak{A} \restriction k := (A, (E_n)_{n<k})$ und $\mathfrak{B} \restriction k := (B, (E_n)_{n<k})$ elementar äquivalent.

(d) T ist vollständig.

(e) Es existieren zwei abzählbare Modelle von T, die nicht isomorph sind.
Hinweis: Die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ ist abzählbar.