Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 6 vom 28.5.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 04.06.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. Wir versuchen zwei verschiedene Definitionen eines geordneten Paares. Wir definieren

$$\langle x, y\rangle_0 := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

sowie

$$\langle x, y\rangle_1 := \{x, \{y\}\}$$

Zeigen Sie:

(a) $\langle x, y\rangle_0$ definiert ein geordnetes Paar, d.h. aus $\langle x, y\rangle_0 = \langle x', y'\rangle_0$ folgt $x = x'$ und $y = y'$.
(b) $\langle x, y\rangle_1$ definiert nicht ein geordnetes Paar.

2. (2 Punkte) Es sei $f\colon x \to y$ injektiv. Zeigen Sie: Es gibt eine injektive Funktion von $\mathcal{P}(x)$ nach $\mathcal{P}(y)$.

3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Fundierungsaxiom die Existenz von folgenden Mengen verbietet:

(a) Einer Menge x, sodass $x \in x$.
(b) Einer Menge $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$, sodass $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_{k-1} \in x_0$.

Wir werden später sehen, dass das Fundierungsaxiom äquivalent dazu ist, dass es keine Funktion f auf den "internen natürlichen Zahlen" gibt, sodass $f(n+1) \in f(n)$ für alle n gilt.

4. Zeigen Sie: Wenn ZFC konsistent ist, dann existiert ein Modell von ZFC, das nicht fundiert ist. Überlegen Sie sich (wenn Sie möchten, es ist kompliziert), warum dieses Modell immer noch das Fundierungsaxiom erfüllt.

Hinweis: Denken Sie an den Kompaktheitssatz!

5. Zeigen Sie, ohne das Potenzmengenaxiom zu benutzen, dass es für zwei beliebige Mengen a und b die Menge $a \times b := \{\langle x, y\rangle_0 \mid x \in a \wedge y \in b\}$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie erst die Existenz der Mengen $\{x\} \times b$ für $x \in a$ durch das Ersetzungsaxiom.