Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 7 vom 04.6.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 11.06.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. (8 Punkte) Es sei $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Gegeben eine Bijektion $\beta\colon \mathbb{N} \to [\mathbb{N}]^{<\omega}$ definieren wir $i \in_\beta j$ (für $i, j \in \mathbb{N}$) genau dann, wenn $i \in \beta(j)$. So erhalten wir die $\{\epsilon\}$-Struktur $\mathfrak{N}_\beta := (\mathbb{N}, \in_\beta)$.

(a) Welche Axiome von ZFC (bis auf das Fundierungsaxiom) gelten stets in $\mathfrak{N}_\beta$?

(b) Finden Sie eine Bijektion β, sodass das Fundierungsaxiom in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt?
Hinweis: Probieren Sie die Bijektion β mit $\beta^{-1}(\{n_0, \dots, n_{k-1}\}) = 2^{n_0} + \dots + 2^{n_{k-1}}$

(c) Finden Sie eine Bijektion β, sodass das Fundierungsaxiom nicht in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt?
Hinweis: Denken Sie an die Aufgabe 3 (a) des letzten Blattes.

(d) Finden Sie eine Bijektion β, sodass das Fundierungsaxiom in $\mathfrak{N}_\beta$ gilt und es trotzdem eine unendliche Kette $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $i_{n+1} \in_\beta i_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
Hinweis: Modifizieren Sie die Bijektion aus Teil (b) auf den Zweierpotenzen.

2. (8 Punkte) Es sei S eine beliebige Menge. Wir nennen S *T-endlich* (das steht für *Tarski-endlich* nach Alfred Tarski), wenn jede nichtleere Menge $X \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein $\subseteq$-maximales Element hat, d.h. es gibt $u \in X$, sodass kein weiteres Element $v \in X$ mit $u \subsetneq v$ existiert.

S heißt *T-unendlich*, wenn S nicht T-endlich ist.

S heißt *endlich*, wenn es eine natürliche Zahl n sowie eine Bijektion $f\colon S \to n$ gibt. S heißt *unendlich*, wenn S nicht endlich ist.

(a) Ist jede natürliche Zahl T-endlich?

(b) Ist ω T-unendlich?

(c) Ist jede endliche Menge T-endlich?

(d) Ist jede unendliche Menge T-unendlich?

Freiwilliger Zusatz: Überlegen Sie sich, wo (bzw. ob überhaupt) Sie in ihrer Argumentation das Auswahlaxiom benutzen.