Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 8 vom 11.6.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 18.06.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte. Es wird 10 Blätter geben.

1. Gegeben zwei lineare Ordnungen $(A, <_A)$ und $(B, <_B)$ sei $(A, <_A) + (B, <_B)$ die lineare Ordnung $<$ auf $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ derart, dass $(a, 0) < (a', 0)$ genau dann, wenn $a <_A a'$, $(b, 1) < (b', 1)$ genau dann, wenn $b <_B b'$ und stets $(a, 0) < (b, 1)$.

Zeigen Sie:

(a) Wenn A und B Wohlordnungen sind, dann auch $A + B$ (es reicht, wenn Sie die Fundiertheit zeigen).

(b) Wenn γ und α Ordinalzahlen sind, dann ist $\gamma + \alpha = \operatorname{otp}((\gamma, \in) + (\alpha, \in))$.
Hinweis: Induktion über α.

2. Zeigen Sie per Induktion über γ, dass sich jede Ordinalzahl γ als $\lambda + n$ schreiben lässt, wobei n eine natürliche Zahl sowie λ eine Limeszahl oder 0 ist.

3. Zeigen Sie mithilfe des Zorn'schen Lemmas, dass jeder Vektorraum eine Basis hat.

4. Es sei X eine Menge. $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein *Filter auf* X, wenn folgendes gilt:

(a) $X \in F$ und $\emptyset \notin F$

(b) Für $A, B \in F$ ist $A \cap B \in F$

(c) Für $A \in F$ und $A \subseteq B \subseteq X$ ist $B \in F$.

Nun sei X eine Menge und F ein Filter auf X.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. Es gibt keinen Filter G, sodass $F \subsetneq G$.

ii. Für alle $A \subseteq X$ gilt entweder $A \in F$ oder $X \setminus A \in F$.

Hinweis: Gegeben ein $A \subseteq X$, sodass weder $A \in F$ noch $X \setminus A \in F$, definieren Sie $G_A := \{B \subseteq X \mid \exists C \in F(C \cap A \subseteq B)\}$. Ist G_A ein Filter? Ist $F \subseteq G_A$?

(b) Zeigen Sie durch transfinite Rekursion, dass es einen Ultrafilter G gibt, sodass $F \subseteq G$.
Hinweis: Auf der nächsten Seite.

Schreiben Sie $\mathcal{P}(X) = \{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ für eine Ordinalzahl λ und definieren Sie eine $\subseteq$-aufsteigende Folge $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ von Filtern, sodass $F \subseteq F_0$ und für jedes $\alpha < \lambda$ entweder $A_\alpha \in F_\alpha$ oder $X \setminus A_\alpha \in F_\alpha$ gilt. Ist eine aufsteigende Vereinigung von Filtern wieder ein Filter?

Überlegen Sie sich (freiwillig), inwiefern die Benutzung des Zorn'schen Lemmas einem Rekursionsbeweis ähnelt.