Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 9 vom 18.6.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 25.06.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte. Es wird 10 Blätter geben. Blau: Korrektur vom 25.6.

1. (6 Punkte) Beweisen Sie den Satz von Cantor, Schröder und Bernstein: Es seien A und B Mengen sowie $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h\colon B \to A$.

Hinweis: Sie können der Einfachheit halber annehmen, dass $A \subseteq B$ und $f(a) = a$ ist (warum?). Setzen Sie $C := \{g^n(b) \mid n \in \omega, b \in B \setminus A\}$ sowie $h(x) = g(x)$ für $x \in C$ und $h(y) = y$ für $y \in B \setminus C$. Zeigen Sie, dass h eine Bijektion ist.

2. (4 Punkte) Folgern Sie aus Aufgabe 1, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt.

3. (6 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f(x, y) = x + y$ ist primitiv rekursiv.

(b) Die Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ ist primitiv rekursiv.

(c) Für $n \in \omega$ definieren wir die Hyperoperationen $[n]$ wie folgt:

$$a[n]b := \begin{cases} b+1 & n = 0 \\ a & n = 1 \wedge b = 0 \\ 0 & n = 2 \wedge b = 0 \\ 1 & n \geq 3 \wedge b = 1 \\ a[n-1](a[n](b-1)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Überlegen Sie sich, wie die Operationen $[1], [2], [3]$ aussehen und zeigen Sie per Induktion über n, dass die Funktion $f_n(x, y) = x[n]y$ für jedes $n \in \omega$ primitiv rekursiv ist.