Mathematische Logik
Sommersemester 2024
Übungen

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 11 vom 2.7.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 09.07.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte. Dies ist ein Bonusblatt.

1. (8 Bonuspunkte) Wir betrachten folgende Aussagen (für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$):

(A) A ist rekursiv.

(B) A ist das Bild einer streng monoton wachsenden (d.h. für alle n ist $f(n) < f(n+1)$) rekursiven Funktion.

Entscheiden Sie folgendes und Begründen Sie dabei ihre Entscheidung:

(a) Folgt (B) aus (A)?

(b) Folgt (A) aus (B)?

(c) Es sei B rekursiv aufzählbar. Gibt es dann eine rekursive Menge $C \subseteq B$ derart, dass $|C| = |B|$?

2. (8 Bonuspunkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine rekursive Menge.

(a) Ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ stets rekursiv aufzählbar?

(b) Nun sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl $e(n)$ derart, dass die Registermaschine $\mathcal{M}_n$ mit Index $e(n)$ (d.h. $\ulcorner \mathcal{M}_n \urcorner = e(n)$) stets stoppt und $k \in A_n$ ist genau dann, wenn $F^1_{\mathcal{M}_n}(k) = 0$. Die Funktion $n \mapsto e(n)$ sei außerdem rekursiv. Ist dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ rekursiv aufzählbar?

Hinweis zur Klausur: Sie dürfen ein doppelseitig handbeschriebenes DinA4-Blatt zur Klausur mitbringen und während dieser verwenden. Andere Hinweise wie das gesamte Skript sind nicht gestattet.