Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

Übungsblatt 10 vom 25.6.2024

Abgabe entweder vor der Vorlesung am 02.07.2024 oder vor 12 Uhr im Logik-Flur (Mathematisches Institut, 3. Stock) im Briefkasten des Tutors. Sofern nicht anders angegeben, gibt jede Aufgabe 4 Punkte.

1. (12 Punkte) Die Ackermann-Funktion A ist wie folgt definiert:

$$A(x,0) := x+1, A(0,y+1) := A(1,y), A(x+1,y+1) := A(A(x,y+1),y)$$

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Ackermann-Funktion rekursiv, aber nicht primitiv rekursiv ist.

Wir nennen eine Folge $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$, wobei jedes a_i die Form (x_i, y_i, z_i) hat, eine *Berechnung der Ackermannfunktion*, wenn folgendes gilt für beliebige $i < n$:

(a) wenn $a_i = (x, 0, z)$, so ist $z = x + 1$.

(b) wenn $a_i = (0, y+1, z)$, dann gibt es ein $j < n$, sodass $a_j = (1, y, z)$.

(c) wenn $a_i = (x+1, y+1, z)$, dann gibt es $j, j' < n$, sodass $a_j = (x, y+1, w)$ und $a_{j'} = (w, y, z)$.

Beweisen Sie:

(a) Die Menge B aller Berechnungen der Ackermannfunktion ist primitiv rekursiv.

(b) $A(x,y) = z$ genau dann, wenn es $a \in B$, $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ und $i < n$ gibt, sodass $a_i = (x, y, z)$.

(c) A ist rekursiv.

Nun sehen wir, dass A nicht primitiv rekursiv sein kann (also mindestens eine unbeschränkte μ-Rekursion zur Berechnung braucht).

(d) Zeigen Sie, dass es für jede primitive rekursive Funktion $f \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ein y gibt, sodass für alle $(x_0, \dots, x_{k-1}) \neq (0, \dots, 0)$ gilt:

$$f(x_0, \dots, x_{k-1}) \leq A(\max(x_0, \dots, x_{k-1}), y)$$

(e) Folgern Sie, dass A nicht primitiv rekursiv ist.

Dozentin: Heike Mildenberger
Assistent: Hannes Jakob

2. (4 Punkte) Es sei $\mathcal{A}$ ein beliebiges (anders als in der Vorlesung nicht notwendigerweise einelementiges) Alphabet. Konstruieren Sie eine Registermaschine $\mathcal{K}_h^{r,s}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}$, die das Register $\mathcal{R}_r$ in das Register $\mathcal{R}_s$ unter Benutzung des Hilfsregisters $\mathcal{R}_h$, $h \notin \{r, s\}$ kopiert.

Hinweis: Es reicht, wenn Sie ein Diagramm zeichnen.