Dozentin: Prof. Dr. Heike Mildenberger
Assistent: Dr. Hannes Jakob

ANWESENHEITSBLATT

Besprechung im Tutorat am Mittwoch, dem 30.04.2025.

Aufgabe 1. Es sei $X = \mathbb{N}$. Wir betrachten auf X die *kofinite Topologie* $\mathscr{O}$, d.h. $A \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $A = \emptyset$ oder $X \setminus A$ endlich ist.

1. Es sei $f\colon X \to X$ eine Funktion, sodass für jedes $x \in X$ nur endlich viele $x' \in X$ mit $f(x') = x$ existieren. Ist f stetig (bezüglich $\mathscr{O}$)?
2. Nun sei $f\colon X \to X$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \text{ ist gerade} \\ 1 & x \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

   ist f stetig (bezüglich $\mathscr{O}$)?

Aufgabe 2. Es sei $X = \mathbb{R}$. Wir betrachten die folgenden Topologien auf X:

(a) Es sei $\mathscr{O}_1$ die *Standardtopologie*, also die Topologie, die durch die Standardmetrik erzeugt wird.

(b) Es sei $\mathscr{O}_2$ die *kofinite Topologie* (siehe Aufgabe 1).

(c) Es sei $\mathscr{O}_3$ die *ko-abzählbare Topologie*, d.h. $A \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $A = \emptyset$ oder $X \setminus A$ abzählbar ist.

1. Ist die Funktion $f\colon (X, \mathscr{O}_1) \to (X, \mathscr{O}_2)$ definiert durch $f(x) = x$ stetig? Ist sie ein Homöomorphismus?
2. Gibt es einen Homöomorphismus von $(X, \mathscr{O}_1)$ auf $(X, \mathscr{O}_3)$?

   Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Topologien das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, also eine abzählbare Basis haben.

Aufgabe 3. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass d eine Topologie auf X induziert, indem Sie zeigen, dass die Kollektion

$$\mathscr{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$$

eine Basis ist.

Aufgabe 4. Es sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$. Für eine Funktion $s\colon \{0,\dots,n-1\} \to \{0,1\}$ sei $[s]$ die Menge aller $f \in X$, sodass $f \restriction \{0,\dots,n-1\} = s$.

1. Zeigen Sie, dass die Kollektion

$$\mathscr{B} := \{[s] \mid n \in \mathbb{N}, s\colon \{0,\dots,n-1\} \to \{0,1\}\}$$

   die Basis einer Topologie $\mathscr{O}$ auf X ist. Der topologische Raum $(X, \mathscr{O})$ heißt auch der Cantor-Raum.
2. Zeigen Sie, dass jede Menge $[s]$ auch abgeschlossen bezüglich $\mathscr{O}$ ist.
3. Zeigen Sie, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge bezüglich $\mathscr{O}$ besitzt.