# BLATT 03

06.05.2025

Abgabe am Dienstag, 13.05.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Beantworten Sie folgende Fragen mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

1. Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume und $X := \prod_i X_i$ ausgestattet mit der Produkttopologie. Sind die Projektionsabbildungen $p_i \colon X \to X_i$, definiert durch $p_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$, offen?

2. Es sei $X$ eine Menge, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ ein topologischer Raum und $f \colon X \to Y$ surjektiv. Die von $f$ erzeugte initiale Topologie auf $X$ ist
$$\mathscr{O}_{X,f} := \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathscr{O}_Y\}.$$
Ist $f \colon (X, \mathscr{O}_{X,f}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ offen?

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Es seien $(X_n, d_n)$ metrische Räume für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Metrik $d$ auf $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, sodass $\mathscr{O}_d$ mit der Produkttopologie der Räume $(X_n, \mathscr{O}_{d_n})$, $n \in \mathbb{N}$, übereinstimmt? Wenn Sie die Aussage bejahen, geben Sie so eine Metrik $d$ auf dem Produktraum aus den $(X_n, \mathcal{O}_{d_n})$, $n \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von $d_n$, $n \in \mathbb{N}$, an.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für $i \in I$ und $A_i \subseteq X_i$ Teilmengen. Sei $X := \prod_i X_i$ mit der Produkttopologie ausgestattet.

1. Gilt $(\prod_i A_i)^\circ \subseteq \prod_i \mathring{A}_i$?

2. Gibt es ein Beispiel für $(\prod_i A_i)^\circ \subsetneq \prod_i \mathring{A}_i$? Wenn Sie die Aussage bejahen, geben Sie ein Beispiel an.

**Aufgabe 4** (Die Boxtopologie, 4 Punkte)**.** Es seien $(X_i, \mathscr{O}_i)$ topologische Räume für $i \in I$.

1. Zeigen Sie, dass $\{\prod_i U_i \mid U_i \subseteq X_i, U_i \in \mathscr{O}_i\}$ eine Basis einer Topologie auf $\prod_i X_i$ ist.

Wir statten das Produkt $\prod_i X_i$ mit der Topologie aus 1. aus. Seien $A_i \subseteq X_i$ Teilmengen.

2. Gilt $(\prod_i A_i)^\circ \subseteq \prod_i \mathring{A}_i$?

3. Gibt es ein Beispiel für $(\prod_i A_i)^\circ \subsetneq \prod_i \mathring{A}_i$? Wenn Sie die Aussage bejahen, geben Sie so eines an.

**Bonus-Aufgabe** (4 Punkte)**.** Es sei $\mathscr{O}_<$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Geben Sie eine Indexmenge $I$ zusammen mit einer Familie von Funktionen $(f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{i \in I}$ an, sodass die von $(f_i, \mathbb{R}, \mathscr{O}_<)_{i \in I}$ bestimmte Initialtopologie auf $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie übereinstimmt.