BLATT 10

01.07.2025

Abgabe am Dienstag, 08.07.2025, um 10:15 vor der Vorlesung oder im Briefkasten im Logik-Flur

Dies ist das letzte Blatt.

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume und $x \in X$, $y \in Y$. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Jede Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
2. Für jedes $x \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ trivial, d.h. sie ist die einelementige Gruppe.
3. Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ sind homotop.

Aufgabe 3. Seien X, Y topologische Räume, sodass Y zusammenziehbar ist. Es seien $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen. Sind f und g homotop?

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Es sei X eine nichtleere Menge und $x \in X$. Auf X seien $\mathscr{O}_0$ die *indiskrete* (d.h. $\mathscr{O}_0 := \{\emptyset, X\}$) und $\mathscr{O}_1$ die *diskrete* (d.h. $\mathscr{O}_1 := \mathcal{P}(X)$) Topologie.

1. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ bzgl. $\mathscr{O}_0$.
2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ bzgl. $\mathscr{O}_1$.

Bonus-Aufgabe (2+2+2 Bonuspunkte)**.** Es sei G eine topologische Gruppe und X kompakt und hausdorffsch. Wir nehmen an, dass G *stetig auf X operiert*, d.h., dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

eine stetige Abbildung bzgl. der Produkttopologie ist. Wir statten die Menge

$$H(X) := \{f\colon X \to X \mid X \text{ ist ein Homöomorphismus}\}$$

mit der kompakt-offenen Topologie aus (vgl. Blatt 08). Zeigen Sie:

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $f_g\colon X \to X$, $f_g(x) = gx$, in $H(X)$.
2. Die Abbildung $F\colon G \to H(X)$, definiert durch $F(g) = f_g$, ist stetig bzgl. der kompakt-offenen Topologie.

Entscheiden Sie:

3. Gibt es eine topologische Gruppe G, sodass F bijektiv oder sogar ein Homöomorphismus ist?