SEMINAR IM SOMMERSEMESTER 2025: MATHEMATIK OHNE DAS AUSWAHLAXIOM

MAXWELL LEVINE UND HEIKE MILDENBERGER

Vorbesprechung

am 29.1.2025 um 13:15 Uhr im Raum 313

Tutorat:

Maxwell Levine

Zeit und Ort des Seminars

Di 16-18, SR 127

Vorträge

1. Vortrag 22.4.2025
Das Axiom der Determiniertheit AD und eine Konsequenz
Vorstellung des Axioms. Dieses sagt: Für bestimmte Zweipersonenspiele mit ω Spielzügen hat einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. Man nennt dies: Das Spiel ist determiniert. Der Satz von Mycielski und Świerczkowski, dass AD und ZF impliziert, dass jede Teilmenge der reellen Zahlen Lebesgue-messbar ist.
Quelle: Jech [3, Chapter 33], die Originalarbeit von 1964 [6].

2. Vortrag 29.9.2025
Modelle von ZFA.
Dieses sind Modelle mit Urelementen (Atomen). Je nach Wahl der Menge der Atome A gilt ZFA + AC oder ZFA + nicht AC. Kapitel 4 aus Jechs Buch [2].

3. und 4. Vortrag 6.5.2025 und 13.5.2025
Die relative Konsistenz von nicht AC durch die Konstruktion eines Modells, das nicht auf die erblich ordinal definierbare Klasse HOD zurückgreift.
Kapitel 5 aus Jechs Buch [2].

Date: Stand vom 30.1.2025.

Man benutzt Forcings mit vielen Automorphismen und arbeitet mit einem Filter $\mathcal{F}$ von Untergruppen der Gruppe der Automorphismen von $(P, <)$ und $\mathcal{F}$-erblich symmetrischen Namen.

Eventuell kann man auch [1, Kapitel 17] heranziehen.

5. Vortrag 20.5.2025

Der Einbettungssatz von Jech und Sochor

Dieser Satz sagt: Für jede Ordinalzahl α laesst sich jedes ZFA-Modell U mit Mengenteil $M \subseteq U$ sich in ein ZF-Modell N einbetten. N is hierbei in eine symmetrische Forcingerweiterung $N = M_{\mathcal{F}}[G] \supseteq M$, in der es eine Menge B von Namen gibt, die sich in α Potenzmengenstufen isomorph zu A verhalten. Inbesondere gibt es dann in B die Verletzung der Auswahl, mit der man A gewählt hat.

Dieser Vortrag kann ausgelassen werden, da nichts auf ihn aufbaut. Er ist unseres Erachtens leichter als die späteren Themen. Der Einbettungssatz gestattet die die Umwandlung aller ZFA-Modelle, die in den 1950er Jahren erstellt wurden, als man noch kein Forcing kannte, zu ZF-Modellen. Namen wie das Fraenkel-Modell und das Mostowksi - Modell sind bis heute gängig.

Beweis in [2, Chapter 6].

(6. und 7.) oder (7. und 8.) Vortrag 27.5.2024

Das Solovay-Modell.

Dies ist eine Forcingerweiterung aus dem Jahr 1964, in der jede Teilmenge der reellen Zahlen Lebesgue-messbar ist und die Baireeigenschaft hat und jede überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen eine perfekte Teilmenge enthält (perfect set property). Später zeigte Mathias, dass auch die Ramseyeigenschaft für Färbungen von ω^ω mit endlich vielen Farben gilt. Das Solovay-Forcing ist sehr einfach. Seine Auswertung nutzt trickreiche Techniken.

Quellen: Das Original [10] oder [3] oder auch [4]. Die Mathias-Arbeit [5].

8. oder 9. Vortrag nach der Pfingspause

Solovays stark unerreichbare Kardinalzahl ist notwendig.

Dieser Satz aus den 1980er Jahren sagt:
Con(ZF+jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Lebesgue-messbar) $\to$ Con(ZFC + $\exists$inaccessible).

Quellen: Die Arbeiten über den sogenannten Raisonnier-Filter: [8] [7].

Man kann auch Shelahs Originalarbeit [9] heranziehen.

Ein Notwendigkeitssatz gilt auch für die perfect set property aber *nicht* für die Baireeigenschaft. Shelah [9] fand eine Amalgamierungseigenschaft, die einen Modellbau für die Baireeigenschaft in ZFC gestattet. Die Konsistenzstärke der Mathias-Färbungseigenschaft ist offen.

x. Möglicher Vortrag nach Pfingsten

Das Modell $L(\mathbb{R})$.

Unter geeigneten großen Kardinalzahlen ist $L(\mathbb{R})$ ein Modell von ZF mit den von Banach und Steinhaus vorgeschlagenen Determiniertheitseigenschaften $\mathsf{ZF}+\mathsf{DC}+\mathsf{AD}$ oder sogar $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$. Determiniertheit impliziert alle Regularitätseigenschaften, die im Solovay-Modell gelten.

Quelle [11].

Literatur

[1] Lorenz Halbeisen. *Combinatorial Set Theory.* Springer, 2nd edition, 2017.

[2] Thomas Jech. *The Axiom of Choice.* North Holland, 1973.

[3] Thomas Jech. *Set Theory. The Third Millenium Edition, revised and expanded.* Springer, 2003.

[4] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2 edition, 2009.

[5] Adrian Mathias. Happy families. *Ann. Math. Logic*, 12:59–111, 1977.

[6] Jan Mycielski and S. Świerczkowski. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. *Fund. Math.*, 54:67–71, 1964.

[7] Jacques Raisonnier and Jacques Stern. The strength of measurability hypotheses. *Israel J. Math.*, 50:337–349, 1985.

[8] Ralf Schindler. *Set theory.* Universitext. Springer, Cham, 2014. Exploring independence and truth.

[9] Saharon Shelah. Can you take Solovay's inaccessible away? *Israel J. Math.*, 48:1–47, 1984.

[10] Robert Solovay. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. Math.*, 92:1–56, 1970.

[11] W. Hugh Woodin. *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, volume 1 of *de Gruyter Series in Logic and its Applications.* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, revised edition, 2010.