1. 12. 2010

Wdh

$H = \{(M, w) \mid M$ TM, $w \in \Sigma^*$
M akz. $w\}$ unentscheidbar.

$H^c = \Sigma^* \setminus H$ nicht rek. aufz.

Die Logik der ersten Stufe

Wdh. Terme
Formeln : $\tau = \{(P_i)_{i \leq n}, (f_j)_{j \leq m}, (c_k)_{k \leq r}\}$

Lemma: Keine Formel ist ein echtes Anfangsstück einer anderen Formel.

Bsp $\underset{-}{\alpha}^{f t_1 \dots t_n}, \neg \underline{\alpha}^{t_n}$

Bsp: $\tau = \{ \in \}$ „Sprache" der Mengenlehre

$\in$ zweistellig

$\exists v_1 \; \forall v_2 \; \underbrace{v_2 \in v_1}_{\in(v_2, v_1) \quad \in v_2 v_1}$

$\exists v_1 \; \forall v_2 \; v_2 = v_1$

$\exists v_1 \; v_1 = v_2$

Def: Die Eigenschaft „v tritt frei in φ auf" wird induktiv über den Formelaufbau von φ definiert:

0. Wenn φ atomar ist, dann tritt v frei in φ auf, :gdw wenn v in φ vorkommt.

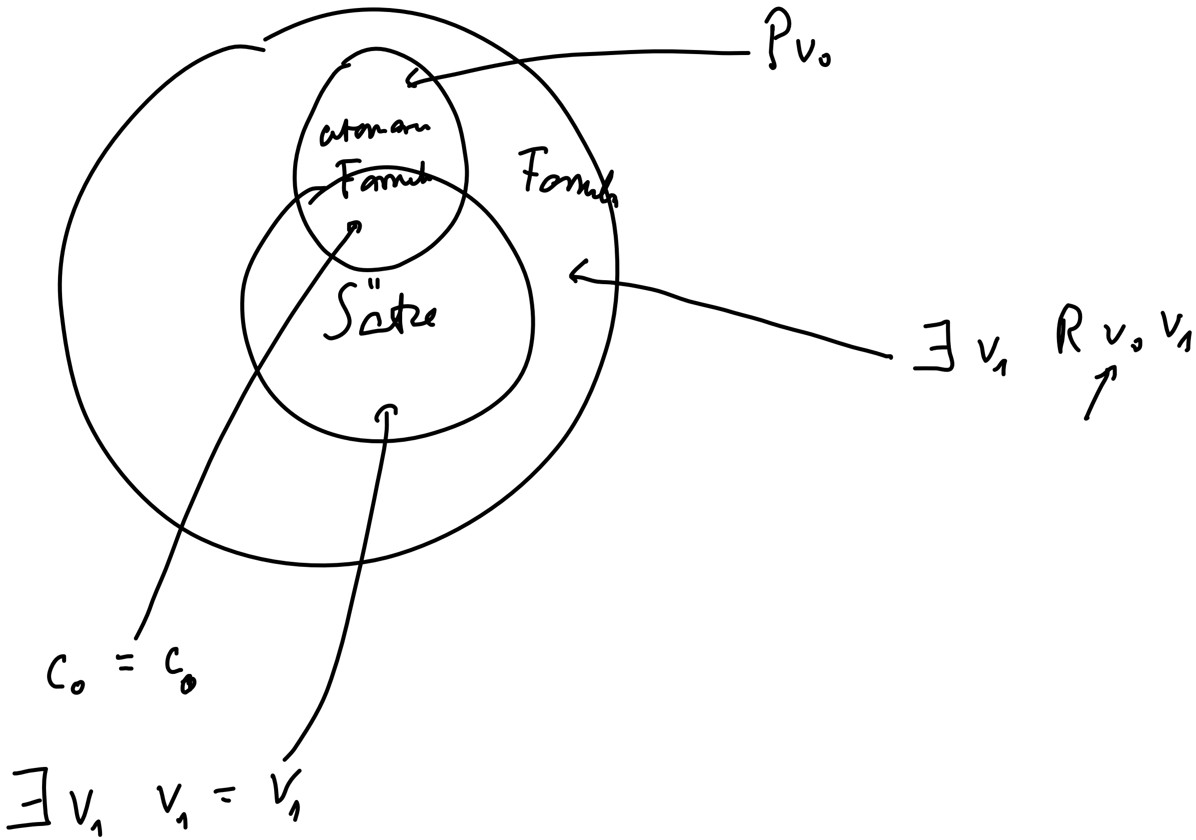
1. v tritt frei in $\neg\varphi$ auf :gdw v in φ frei auftritt.

2. v tritt frei in $(\varphi \rightarrow \psi)$ auf :gdw v in φ frei auftritt oder v in ψ frei auftritt.

3. v_j tritt frei in $\underline{\forall v_i}\, \varphi$ auf, :gdw v_j in φ frei auftritt und $\underbrace{v_j \neq v_i}_{\Longleftrightarrow\, j \neq i}$ ist.

Def: Wenn v in φ vorkommt und nicht frei in φ vorkommt, dann sagen wir: v ist eine gebundene Variable in/von φ.

Def: Wenn keine Variable in φ ~~vor~~ frei vorkommt, dann heißt φ ein Satz.



Abkürzungen

$(\alpha \vee \beta)$ steht für $(\neg\alpha \to \beta)$

$(\alpha \wedge \beta)$ steht für $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ also für

$$\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) = \neg(\alpha \to \neg\beta)$$

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ steht für $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

$\exists v \varphi$ steht für $\neg\forall v \neg\varphi$.

$t_1 = t_2$ st. für $= t_1 t_2$

$t_1 \neq t_2$ steht für $\neg t_1 = t_2$

Klammern:

0. Wir lassen die äußersten Klammern weg.

$\alpha \vee \beta \ \hat{=} \ (\alpha \vee \beta)$

$\underline{\neg \alpha \vee \beta} \ \not\hat{=} \ \neg(\alpha \vee \beta)$

1. $\exists v$, $\forall v$ beziehen sich auf so wenig wie möglich

$\forall v \, (\varphi \vee \psi) \ \not\hat{=} \ \forall v \varphi \vee \psi$.

2. Konvention

$\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma$ steht für $\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)$

äq zu $(\alpha \wedge \beta) \longrightarrow \gamma$

Semantik: Wahrheit und Modelle

<u>Def</u> Eine τ-Struktur ist ein Tupel (eine Funktion)

$$\mathfrak{A} = \left(A, (P^{\mathfrak{A}})_{P\in\tau}, (f^{\mathfrak{A}})_{f\in\tau}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\tau}\right)$$ mit folgenden

Eigenschaften:

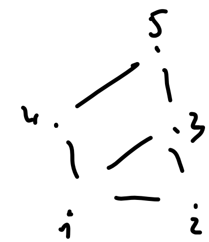
0. $A \neq \emptyset$, A Menge
   A wird der Träger, das Universum, der Grundbereich von $\mathfrak{A}$ genannt. $\forall$ und $\exists$ laufen über A.

1. Wenn $P \in \tau$ ein n-stelliges Prädikatssymbol ist, dann ist $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n := \underbrace{A \times \dots\dots \times A}_{n \text{ mal}}$

2. $c^{\mathfrak{A}} \in A$ für $c \in \tau$.

3. $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$ für $f \in \tau$, f n-stellig. $n \geq 1$

$c^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, P^{\mathfrak{A}}$ heißen die Interpretation von c, f, P in der Struktur $\mathfrak{A}$.

Beispiel: $\mathcal{V} = (V, \underbrace{E^{\mathcal{V}}}_{\text{2-stell. Relation.}}) =$ 

$= \big(\{1,2,3,4,5\}, \{ \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{4,5\}, \{3,5\}, \{1,4\} \} \big)$

$\tau = \{E\}$

Algebra: Gruppen: $(G, \circ^{\mathcal{G}}, e^{\mathcal{G}}, {}^{-1\,\mathcal{G}})$

$\circ$: 2-stell Fkt

e: Konst.

${}^{-1}$: 1-stell Fkt

Arithmetik $\quad \tau = \{0, 1, +, \cdot\}$

$\qquad - \quad :$

Konst. $\quad$ 2-stell Fkt.

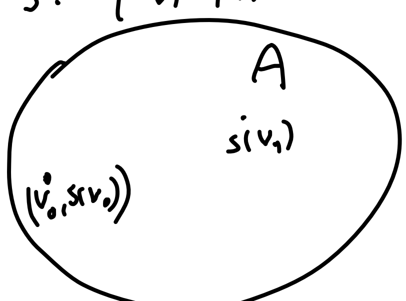
$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, \{(n,m,l) \mid n+m=l\}, \{(n,m,l) \mid n\cdot m = l\})$

ist eine τ-Struktur. $\qquad s(v_i) = 1+1+1+1+1$
$= 5$

Ziel: „$\mathfrak{A}$ mit der $\mathfrak{A}$-Belegung s erfüllt φ" zu definieren

„φ ist in $(\mathfrak{A}, s)$ wahr"

Def: $s: \{v_0, v_1, \dots\} \to A$ heißt A-Belegung.



Def $\bar{s}$, die $\mathfrak{A}$-Fortsetzung von s auf die I-Terme, ist def. durch:

1. $\bar{s}(v_i) = s(v_i)$ für $i \in \mathbb{N}$
2. $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
3. $\bar{s}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$

$\bar{s}(0+0+0+0) = \bar{s}(0) + \bar{s}(0) + \bar{s}(0) + \bar{s}(0)$

$= 0+0+0+0$ in $\mathfrak{N}$ von voriger Seite

Def Wenn s eine $\mathfrak{A}$-Belegung ist und x eine Variable ist und $a \in A$ ist, dann ist $s(x|a) = s\left(\frac{a}{x}\right)$, sprich

„s, x ersetzt durch a", die folgende $\mathfrak{A}$-Belegung

$$s'(y) = \left(s\frac{a}{x}\right)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{falls } x \neq y \\ a & \text{falls } y = x \end{cases}$$

$s'(x) \neq s(x)$ mögl

$s'(y) = s(y)$ für $y \neq x$.

<u>Def</u> „$\mathfrak{A}$ mit der $\mathfrak{A}$-Belegung s erfüllt φ" wird für τ-Formeln φ und τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ induktiv über den Aufbau von φ gleichzeitig für alle s definiert:

Atomare Formeln

1. $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 = t_2$ (auch geschrieben $\mathfrak{A} \models (t_1 \cancel{[s]} = t_2)[s]$)

:gdw $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2) \in A$

$(f^{\mathfrak{A}})_{f \in \tau}, (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \tau}$ geht ein.

2. Für $P \in \tau$, n-stelliges Prädikatsymbol

$\mathfrak{A} \models Pt_1 \dots t_n [s]$ $\left((\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n\right)$

:gdw $\underbrace{(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))}_{\in A^n} \in P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$

$0 < 1$

zusammengesetzte φ

3. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi\,[s]$:gdw $\underbrace{\text{nicht } \mathfrak{A} \models \varphi\,[s]}_{\mathfrak{A} \not\models \varphi\,[s]}$

4. $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)\,[s]$:gdw wenn $\mathfrak{A} \models \varphi\,[s]$, dann $\mathfrak{A} \models \psi\,[s]$

$\to$	φ	ψ
φ	W	F
ψ	W	W

es gibt $a \in A$

5. $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi\,[s]$:gdw für jedes $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi\,\underbrace{[s(x|a)]}_{\text{I.V. für } s(x|a)}$

$\exists x\, \varphi\,[s]$ gdw

$(\mathfrak{A}, s)$ heißt Interpretation

$\mathfrak{A}$: Struktur, s: Belegung

kleine Übung: Wird die Abkürzung $\exists x \varphi \mathrel{\hat=} \neg\forall x \neg\varphi$ richtig interpretiert

Bsp: $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$

gewöhnliche Interpretation.

$s : \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$s(v_i) = i$

$(\mathfrak{N}, s) \models \neg \forall v_0 \exists v_1 \; v_0 + v_1 = 0$

$\models \exists v_0 \forall v_1 \; v_0 + v_1 \neq 0$

~~$s(v_0)$~~ für v_0 nehmen wir $6 = a$

es gibt a $\mathfrak{A}, (\mathfrak{N}, s(v_0 | a)) \models \forall v_1 \; v_0 + v_1 \neq 0$

es gibt ein a für alle $b \in A$ $\quad (\mathfrak{N}, (s(v_0 | a))(v_1 | b)) \models v_0 + v_1 \neq 0$

$a + b \neq 0$?

$6 + b \neq 0$

Die Definion von $\models$

$$\Gamma \models \varphi,$$

Γ impliziert φ

aus Γ folgt φ

$\psi \models \varphi$ steht für $\{\psi\} \models \varphi$

$\models \varphi$ steht für $\emptyset \models \varphi$

<u>Def</u> Sei Γ eine τ-Formelmenge und sei φ eine τ-Formel.

$\Gamma \models \varphi$:gdw <u>für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$</u>, für alle $\mathfrak{A}$-Belegungen s gilt: <u>Wenn</u> $\underbrace{\text{für alle } \gamma \in \Gamma \ (\mathfrak{A}, s) \models \gamma}_{(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma}$, <u>dann</u> $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$.

Beispiel: Γ = Gruppenaxiome

$$\varphi = \forall v_0 \, \forall v_1 \, \forall v_2 \, (v_0 \circ v_1 = e \wedge v_0 \circ v_2 = e \rightarrow v_1 = v_2)$$

das inverse Element ist eindeutig.

$$\Gamma \models \varphi \; ?$$

In jeder Formel φ kommen nur endl. viele Variablen vor, sagen wir $\{v_0, \dots, v_n\}$.

Beh: zur Entscheidung von $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ braucht man nur $\mathfrak{A}$ und $s \restriction \{v_0, \dots, v_n\}$ zu kennen.

Satz (Koindizenzlemma)

Seien s_1 und s_2 $\mathfrak{A}$-Belegungen und sei φ eine Formel.
Wenn s_1 und s_2 auf den freien Variablen übereinstimmen,
dann gilt $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ gdw $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$.

Bew: Induktiv über den Aufbau von φ, simultan für alle (s_1, s_2)

1. φ atomar. $\varphi = Pt_1 \dots t_n$ (P kann das Gleichheitszeichen sein)

$(\mathfrak{A}, s_1) \models Pt_1 \dots t_n \overset{\text{Def}}{\iff} (\bar{s}_1(t_1), \dots, \bar{s}_1(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

$\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$, für alle τ-Terme in den freien Variablen von φ.

Induktiv über den Aufbau der Terme

Anfang $c \in \tau$ $\bar{s}_1(c) = c^{\mathfrak{A}} = \bar{s}_2(c)$

v_i freie Variable von φ $s_1(v_i) = s_2(v_i)$ nach Voraussetzung des Satzes

Termaufbau

$$\bar{s}_1(f\,t_1 \ldots t_n) = \bar{s}_2(f\,t_1 \ldots t_n)$$

$\parallel$ Def $\qquad\qquad$ $\parallel$ Def

$$f^{\mathcal{A}}(\bar{s}_1(t_1), \ldots, \bar{s}_1(t_n)) \qquad f^{\mathcal{A}}(\bar{s}_2(t_1), \ldots, \bar{s}_2(t_n))$$

$=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $=$ $\quad$ I.V.

Fall 2 $\neg\varphi$ Schritt.

$$(\mathcal{A}, s_1) \models \neg\varphi \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{A}, s_1) \not\models \varphi \overset{\text{Kontrapos. von I.V.}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{A}, s_2) \not\models \varphi$$

$$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} (\mathcal{A}, s_2) \models \neg\varphi$$