3. 12. 2010

$\mathcal{L}(\tau)$

$\models$ Modellbeziehung \models

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

$\mathfrak{A}$-Belegung

$\models$ Folge-Beziehung, Implikation

$\Gamma \models \varphi \quad :\Leftrightarrow \quad \forall (\mathfrak{A}, s)$ (Wenn $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$ f.a. $\gamma \in \Gamma$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$)

turnstyle $\vdash$

Logic 1 is to teach that the double turnstyle is the simple turnstyle

$\models$ semantische

$\Gamma \vdash \varphi$ $\quad$ φ ist aus Γ beweisbar.

Ziel: $\models$ berechenbar zu gestalten

Semantik

Struktur $\mathfrak{A}$

Belegung

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

Syntax

Terme

Formeln

$\mathcal{L}(\tau)$

Belegung

$s(x|a)$

Koinzidenzlemma:

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ hängt nur von $\underbrace{s \upharpoonright fr(\varphi)}_{\text{endl.}}$ ab.

$fr(\varphi) = \{ v_i \mid v_i \text{ in } \varphi \text{ frei} \}$

$s : \{ v_0, v_1, \dots \} \to A$

Fall 2: $\neg\varphi$

Fall 3: $(\varphi \to \psi)$

$$(\mathfrak{A}, s_1) \models (\varphi \to \psi) \quad :\overset{\text{Def}}{\iff} \quad \text{Wenn } (\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi, \text{ dann } (\mathfrak{A}, s_1) \models \psi$$

$fr(\varphi \to \psi) = fr(\varphi) \cup fr(\psi)$

I.V. $s_1 \upharpoonright fr(\varphi \to \psi) = s_2 \upharpoonright fr(\varphi \to \psi)$ $\Updownarrow$

I.V. $s_1 \upharpoonright fr(\psi) = s_2 \upharpoonright fr(\psi)$ $\Updownarrow$

$$(\mathfrak{A}, s_2) \models (\varphi \to \psi) \quad \overset{\text{Def.}}{\iff} \quad (\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi \qquad (\mathfrak{A}, s_2) \models \psi$$

Fall 4: $\varphi = \forall x \psi$ $\qquad fr(\varphi) = fr(\psi) \setminus \{x\}$

$s_1(x) \neq s_2(x)$ ist möglich

- $s_1 \upharpoonright fr(\varphi) = s_2 \upharpoonright fr(\varphi)$

$\vdash$

$$(\mathfrak{A}, s_1) \models \forall x \psi \quad \overset{\text{Def}}{\iff} \quad \text{f.a. } a \in A \;\; (\mathfrak{A}, s_1(x|a)) \models \psi$$

I.V. $s_1(x|a) \upharpoonright fr(\psi) = s_2(x|a) \upharpoonright fr\,\psi$ $\Downarrow$

$$(\mathfrak{A}, s_2) \models \forall x \psi \quad \overset{\text{Def}}{\iff} \quad \text{f.a. } a \in A \;\; (\mathfrak{A}, s_2(x|a)) \models \psi$$

$fr(\sigma) = \emptyset$

Korollar: Wenn σ ein Satz ist, dann gilt $((\mathfrak{A}, s) \models \sigma$ für ein $s)$ gdw. $((\mathfrak{A}, s) \models \sigma$ für alle $\mathfrak{A}$-Belegungen$)$.

Bew: $s_1 \upharpoonright fr(\sigma) = s_1 \upharpoonright \emptyset = \emptyset = s_2 \upharpoonright \emptyset = s_2 \upharpoonright fr(\sigma)$

für je zwei $\mathfrak{A}$-Beleg. s_1, s_2.

$\{\sigma \mid \sigma\ \mathcal{L}(\tau)\text{-Satz}\}$ ist nicht so gut für induktive Beweise geeignet, da es nicht ind. definiert aufgebaut.

$\exists v_1 \ldots \exists v_n \varphi(v_1, \ldots, v_n)$

$\updownarrow$

$\forall v$

Korollar: Sei Σ eine Satzmenge und sei σ ein Satz. Dann gilt $\Sigma \models \sigma$ gdw f.a. ~~τ-Str.~~ Strukturen in der gemeinsamen Symbolmenge von Σ und von σ gilt:

Wenn $\mathfrak{A} \models \Sigma$, dann $\mathfrak{A} \models \sigma$.

$\left((\mathfrak{A}, s) \models \Sigma \text{ für ein } s \right)$ gdw $\left((\mathfrak{A}, s) \models \Sigma \text{ für alle } s \right)$

f.a. $\varphi \in \Sigma$ $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

endl?

Def Sei $\mathfrak{A}$ eine Struktur, φ eine Formel und sei $fr(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Dann schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, a_1, \dots a_{n-1}]$ für $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ für ein (oder alle) s mit $s \upharpoonright \{v_0, \dots v_{n-1}\} = \{(v_0, a_0), \dots, (v_{n-1}, a_{n-1})\}$

Def $P \subseteq A^n$ heißt definierbar (ohne Para) auf $\mathfrak{A}$:gdw

es eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}(\tau)$ ($\mathfrak{A}$ τ-Str.) gibt mit

$fr(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, s.d.

$$P = \{ (a_0, \dots, a_{n-1}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi [a_0, \dots, a_{n-1}] \}$$

Def: . - - - - def. bar mit Parametern g.d..

$fr(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}, \underbrace{v_n, v_{n+1}, \dots, v_{m-1}}\}$ ex $\underline{b_n, \dots, b_{m-1} \in A}$

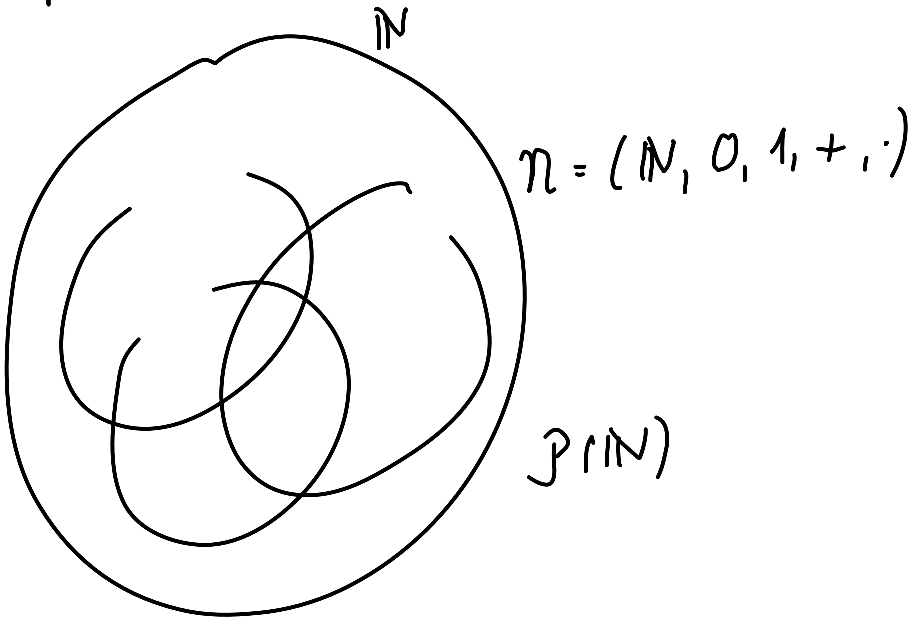
$$P = \{ (a_0, \dots, a_{n-1}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi [a_0, \dots, a_{n-1}, b_n, \dots, b_{m-1}] \}$$

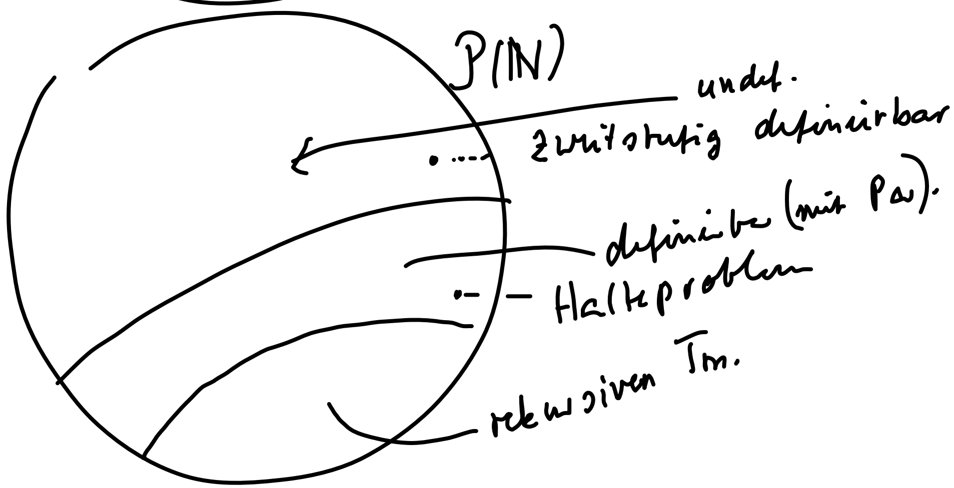
Bsp $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \mid 6 \}$

$\tau = \{ 0, 1, +, \cdot \}$

$(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot) = \mathfrak{N}$

Bsp: Primzahl in $\mathfrak{N}$



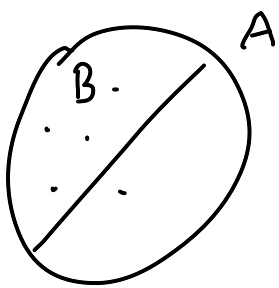


A endl. $|A| = n$

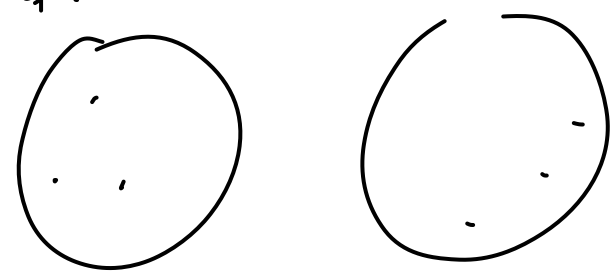
Wie sieht τ aus?

2^n

$\forall$ Fa. $B \subseteq A$ gilt B ist mit Parametern in A in $\mathcal{L}(\emptyset)$ definierbar.



$\forall\ x = b_0 \vee x = b_1 \dots \vee x = b_m$



$B = \{b_1, \dots, b_m\}$ $m < n$

Extremfall: $\mathfrak{N}_{max} = \left(\mathbb{N}, \left(P^{\mathfrak{N}_{max}}\right)_{P \subseteq \mathbb{N}^n,\, n \in \mathbb{N}}\right)$

$P^{\mathfrak{N}_{max}} = P$ für ~~alle~~ jedes $P \subseteq \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$$

versus

$$\mathfrak{N}_{exp} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, E)$$

$$x E^{\mathfrak{N}_{exp}} y = E^{\mathfrak{N}_{exp}} x y = x^y$$

Gödel's oder β-Lemma

$\{ (n, m, s) \mid (n, m, s) \in \mathbb{N}^3, n^m = s \}$ ist in $\mathfrak{N}$ definierbar.

<u>Def</u> Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen. i heißt Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$:gdw $i : A \xrightarrow{bij} B$ und alle Symbole in τ in beide Richtungen erhält, in Formeln:

a) f.a. $c \in \tau$ $\quad i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

b) f.a. $P \in \tau$. $\quad P^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff P^{\mathfrak{B}}(i(a_0), \dots, i(a_{n-1}))$

c) f.a. $f \in \tau$ $\quad i(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_0), \dots, i(a_{n-1}))$

<u>Lemma</u> Jeder Isomorphismus $i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ erhält alle definierbaren Relationen.

$\forall \varphi$ f.a. $\quad P = \{ (a_0, \dots a_{n-1}) \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}] \}$

f.a. $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$

$P(a_0, \dots, a_{n-1}) \iff \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}]$

$P(i(a_0), \dots i(a_{n-1})) \iff \mathfrak{B} \models \varphi[i(a_0) \dots, i(a_{n-1})]$

Induktion über den Aufbau von φ

Kap 4 Der Göd'sche Vollständigkeitssatz
Gödelsche

Def von $\vdash$, Beweistheorie

$\bigwedge$ logische <u>Axiome</u>

Modus ponens: aus φ und $(\varphi \to \psi)$ folgt ψ

$\Gamma \vdash \underline{\varphi}$ und $\Gamma \vdash (\underline{\varphi \to} \psi)$ impliziert $\Gamma \vdash \psi$.

<u>Def</u> Der Hilbertkalkül für Beweise

Die Menge Λ der logischen Axiom enthält (genau) die folgenden sechs Axiomengruppen und ist gegen Verallgemeinerungen abgeschl.

d.h. falls $\cancel{\varphi(x_0,\dots}$ φ ein Axiom ist und $fr(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots v_{n-1}\}$, dann ist auch $\forall v_0 \dots v_{\cancel{n}\,m-1}\, \varphi$ ein Axiom.

Die sechs Gruppen:

Bsp $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

1. Alle Tautologien der Aussagenlogik
   Erinnerung $\{\varphi \mid \models \varphi$, und φ ~~Aussag~~ Aussagenlog. Formel$\}$ ist entscheidbar

2. Ersetzungsaxiome: ← nächste Stunde
   Wenn t (Term) für x in α (Formel) eingesetzt (s. Def xy..) werden kann, dann ist

$$\forall x \alpha \longrightarrow \alpha^x_t$$

(α x ersetzt durch t)

3. Modus Ponens zus. mit $\forall$

$\forall x\, (\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

$\alpha(x) \to \beta(x)$

4. $\alpha \to \forall x \alpha$, wenn x nicht frei in α auftritt.

5. $x = x$ Gleichheitsaxiom

6. $x = y \to (\alpha \to \alpha')$, wenn α atomar ist und α' aus α entsteht, indem man einige x in α durch y ersetzt.

z.B. $x = y \to (x < z \xrightarrow{} y < z)$

$x = y \to (x + x = z \leftrightarrow x + y = z)$

$x = y \to \underline{(x + x = z}$

Sei nun T eine Menge von Formeln und φ sei eine Formel.

Ein (formaler) Beweis von φ aus T ist eine Folge

$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \rangle$ von Formeln, s.d.

$\alpha_{n-1} = \varphi$ und

f.a. $i < n-1$:

a) α_i ~~φ_i~~ $\in \Lambda \cup \Gamma$ oder

b) es gibt $j, k < i$ s.d. ~~$\varphi_i = \alpha$~~ $(\alpha_j \to i) = \alpha_k$

α_j, α_k schon bewiesen

$\alpha_j \to \alpha_i$

$$\frac{\alpha_j, \quad (\alpha_j \to \alpha_i)}{\alpha_i}$$

korr. Bestandteil nach b)

Bsp: $(\alpha_0, \dots \alpha_j, \dots, \alpha_{n-1}, \dots \alpha_k, \sigma, \dots \alpha_{m-1}, \dots \varphi)$

$\alpha_j \in \Lambda$, $\alpha_{n-1} \in \Gamma$, $\alpha_k = (\alpha_j \to \sigma)$, $\varphi = \alpha_{n-1}$

$\models \lambda \qquad \lambda \in \Lambda$

$\models \lambda \leftrightarrow \lambda' \qquad \lambda, \lambda \in \Lambda$

Def $\Gamma \vdash \varphi$:gdw es eine (formalen) Beweis von φ aus Γ gibt

$$E = \{ (\gamma, \varphi, b) \mid b \text{ ein Beweis von } \varphi \text{ aus } \gamma \} \text{ entscheidbar}$$

$$A = \{ (\gamma, \varphi) \mid \gamma \vdash \varphi \} = \{ (\gamma, \varphi) \mid \exists b \ (\gamma, \varphi, b) \in E \}$$

ist rekursiv ~~au~~ aufzählbar

$$\models \forall x (\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$$

$$: \big(\forall x (\alpha \to \beta) \wedge \forall y (\alpha \to \beta) \big) \to (\forall x y \models \alpha \to \forall x y \beta)$$