8. 12. 2010

Hilbert - Kalkül

- gegen $\forall$- Abquantif. abg.

6 Gruppen von Axiomen

Ersetzungsaxiome: $\forall x \alpha \to \alpha^x_t$, wenn t für x in α eingesetzt werden darf. $\exists \forall$

Beispiel: $\alpha = \boxed{\exists y} \, \not\exists \; y \neq x$, $\quad t = y \quad$ α^x_y ist nicht def.

$\forall x \alpha = \forall x \exists y \; y \neq x$ wahr in allen Strukturen, die mindestens 2 Elemente im Träger haben

$\alpha^x_t = \exists y \; y \neq y$ immer falsch

$\mathfrak{A} \vDash \neg (\forall x \alpha \to \alpha^x_t)$, falls $|A| \geq 2$.

Def 4.2. „t kann für x in α eingesetzt werden"

(auch: „x ist frei für $\underset{\text{Term}}{t}$ in α")

wird induktiv über den Aufbau von α def.

1. t kann in atomaren α immer für x eingesetzt werden.

2. t kann in $\neg\alpha$ für x eingesetzt werden, wenn t in α für x eingesetzt werden kann.

   t kann in $(\alpha \to \beta)$ für x einges. werden, wenn t in α für x eing. w. k. und in β.

3. t kann in $\forall y \alpha$ für x eingesetzt werden :gdw
   (a) x in $\forall y \alpha$ nicht frei auftritt (insbes. wenn $x = y$), oder
   (b) $x \neq y$ und y in $\underset{f y z}{t}$ nicht auftritt und t für x in α eing. werden kann.

Lemma: t ~~den~~ kann für x in α eingesetzt werden gdw kein freies Vorkommen von x steht im Wirkungsbereich eines Quantors in α, der ~~da~~ eine Variable von t bindet.

$$\forall y \, (\alpha (\underbrace{t(\cancel{z}^{z}, \overset{x}{y}))}_{\uparrow \, x})$$

~~t~~ x durch $ftxzy$ zu ersetzen, ist nicht prinzipiell verboten.

Def: ~~Wenn t~~ Induktion über α def wir α^x_t, falls ~~t~~ x in α durch t ersetzt werden kann.

1. Für atomares α ergibt sich α^x_t, indem wir alle Vorkommen von x in α durch t's ersetzen.

$$(x = z \wedge Pfxy\,gzw)^x_{gzw}$$

$$(gzw = z \wedge Pf\,gzw\,y\,gzw)$$

2. $(\neg\alpha)^x_t = \neg \underbrace{\alpha^x_t}_{\text{zuerst}}$

3. $(\alpha \to \beta)^x_t = (\alpha^x_t \to \beta^x_t)$

4. $(\forall y \alpha)^x_t$ ist

a) falls $x = y$, $(\forall y \alpha)^x_t = \forall y \alpha$

b) falls $x \neq y$ und x ~~tritt~~ in $\forall y \alpha$ nicht frei auftritt,

$(\forall y \alpha)^x_t = \forall y (\alpha^x_t)$

c) falls $x \neq y$ und y in t nicht vorkommt und

t in α für x eingesetzt kann, dann

$(\forall y \alpha)^x_t = \forall x (\alpha^x_t)$

und undefiniert, sonst.

$\forall x \alpha \to \alpha^{x}_{t}$ ist genau dann ein Ersetzungsaxiom, wenn t für x in α eingesetzt werden kann.

Korrektheit: Alle Axiome sind allgemeingültig, d.h. in allen Strukturen erfüllt.

Lemma: Ersetzungslemma, Substitutionslemma.

Seien $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, s eine $\mathfrak{A}$-Belegung, $\alpha \in \mathcal{L}(\tau)$, t τ-Term, x eine Variable. Wenn t für x in α eingesetzt werden kann

$$\mathfrak{A} \models \alpha^{x}_{t}\,[s] \iff \mathfrak{A} \models \alpha\left[s\left(x \mid \bar{s}(t)\right)\right]$$

$s(x) \in A$ ersetzt durch $\bar{s}(t)$

Beweis:

Atomare Schritte: Ersetzung für Term.

„ $\bar{s}[f^x_t] = s(x,t)(f)$ "

Junktorenschritte gdw zieht sich durch bei $\neg$ und $\rightarrow$ $\vee$ $\wedge$

t kann für x in φ eingesetzt werden.

$\forall$-Schritt: $\varphi = \forall y \alpha$ und

$t^y_{\cdot} = t$

$s(y|a)(t) = s(t)$ Koinz. Lemma

$\mathfrak{A} \models \varphi^x_t [s]$ $\overset{\text{Def von } \varphi}{\iff}$ Fall 4b

$\mathfrak{A} \models (\forall y \alpha)^x_t [s]$ $\iff$ $x \neq y$, x nicht fr. in $\forall y \alpha$

$\mathfrak{A} \models \forall y\, \alpha^x_t [s]$ Def $\overset{\text{Def}}{\iff}$ von $\models$

f.a. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \alpha^x_t [s(y|a)]$ $\overset{\text{I.V. für } \alpha}{\iff}$ für $s(y|a) = s'$

f.a. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \alpha [\underbrace{s(y|a)}_{s'} (x | \underbrace{s(y|a)}_{s'}(t))]$ y tritt nicht in t auf $\iff$

f.a. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \alpha [s(x|\bar{s}(t))(y|a)]$ $\overset{\text{Def}}{\iff}$ von $\models$

f.a. $a \in A$

$\mathfrak{A} \models \forall y \alpha [s(x|\bar{s}(t))]$

Fall 4c

$$\mathfrak{A} \models \varphi^x_t [s] \overset{\text{Def}}{\underset{\text{von } \varphi}{\iff}} \mathfrak{A} \models (\forall y \alpha)^x_t [s] \overset{4c}{\iff}$$

$$\mathfrak{A} \models \forall y\, \alpha^x_t [s] \overset{\text{Def von}}{\underset{\models}{\iff}}$$

f.a. $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha^x_t [s(y|a)] \overset{\text{I.V. auf } s' = s(y|a) \text{ und } \alpha}{\iff}$

f.a. $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha \left[s(y|a)\left(x \middle| \overline{s(y|a)}(t)\right)\right]$

f.a. $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha$ $\quad$ Fall vor: y kommt nicht in t vor. $\Rightarrow \overline{s(y|a)}(t) = \bar{s}(t)$

f.a. $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha \cancel{[s(y|a)]} [s(x|\bar{s}(t))(y|a)] \overset{\text{Def.}}{\iff}$

~~f.a.~~ $\quad \mathfrak{A} \models \forall y \alpha [s(x|\bar{s}(t))]$. $\qquad \square$

Korollar Alle Ersetzungsaxiome sind gültig.

$(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \alpha \to \alpha^x_t$, falls t für x in α eing. und def.

Bew: Ann $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \alpha$. F.a. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \alpha [s(x|a)]$.

Setze $a = \bar{s}(t) \in A$.

Spezialisiere $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x|\bar{s}(t))]$.

Lemma: $\mathfrak{A} \models \alpha^{x}_{t}[s]$. $\square$

Satz Korrektheitssatz, Gültigkeitssatz

Alle Axiome des Hilbert'schen Kalküls sind gültig.

Bew: φ gültig, $\mathrm{fr}(\varphi) \neq \emptyset$. $\quad$ f.a. $(\mathfrak{A}, s)$ $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

f.a. $(\mathfrak{A}, s)$ $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \varphi$.

$$\underbrace{\text{f.a. } (\mathfrak{A}, s) \quad \text{f.a. } a \in A \quad (\mathfrak{A}, s(x|a))}_{\text{f.a. } (\mathfrak{A}, s') \; (\mathfrak{A}, s') \models \varphi} \models \varphi .$$

1. Gruppe: aussagenlog. Tautologien, in denen die Satzvariablen durch $\mathcal{L}(\tau)$ ersetzt sind.

Gültig: $\mathfrak{A} \models \alpha$ hat ~~ke~~ die Wahrheitswerte wahr und falsch, genau wie die Satzvariable.

Bsp: $(\underline{\alpha} \longrightarrow \underline{\beta}) \longleftrightarrow (\neg \underline{\beta} \longrightarrow \neg \underline{\alpha})$

Gruppe 2: Ersetzungsaxiom, nach vorigem Korollar

Gruppe 3: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

z.z. f.a. $(\mathfrak{A},s)$ $(\mathfrak{A},s) \models \forall x(\alpha \to \beta) \xrightarrow{\text{Ind. Def}} (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

f.a. $(\mathfrak{A},s)$: Wenn $(\mathfrak{A},s) \models \forall x(\alpha \to \beta)$, dann $(\mathfrak{A},s) \models \forall x\alpha \xrightarrow{\text{ind. Def.}} \forall x\beta$

f.a. $(\mathfrak{A},s)$: Wenn $(\mathfrak{A},s) \models \underline{\forall} x(\alpha \to \beta)$ und $(\mathfrak{A},s) \models \forall \underline{x} \alpha$, dann $(\mathfrak{A},s) \models \forall x \beta$.

f.a. $(\mathfrak{A},s)$ Wenn f.a. $a \in A$ $\big((\mathfrak{A},s) \models (\alpha \to \beta)[s(x|a)]$ und $(\mathfrak{A},s) \models \alpha[s(x|a)]\big)$ dann f.a. $a \in A$ $(\mathfrak{A},s) \models \beta[s(x|a)]$. ✓

Gruppe 4: $\alpha \to \forall x \alpha$, falls x nicht frei in α auftritt.

z.z. $\mathfrak{A}$, f.a. $(\mathfrak{A}, s)$ $\Big((\mathfrak{A}, s) \models \alpha$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \alpha \Big)$

f.a. $a \in A$ $(\mathfrak{A}, \cancel{s}) \models \alpha[s(x|a)]$

f.a. a $\quad (\mathfrak{A}, s) \models \alpha \iff \mathfrak{A} \models \alpha[s(x\cancel{\models}|a)]$.

f.a. $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha[\underline{s}] \iff \mathfrak{A} \models \alpha[\underline{s(x|a)}]$

s und $s(x|a)$ stimmen auf den freien Variable von α überein,

da f.a. $y \neq x$ $\quad s(x|a)(y) = s(y)$. und da $fr(\alpha) \subseteq \{y \mid y \neq x\}$

Koin.

f.a $a \in A$ $\quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \Big(\iff \mathfrak{A} \models \alpha[s] \Big)$ ✓.

Gruppe 5 $\quad x = x$

$=$ muss immer als $=$ im Träger interpretiert werden.

$$(\mathfrak{A}, s) \models x = x \overset{\text{Def}}{\iff} s(x) = s(x)$$

Gruppe 6: $\quad x = y \to (\alpha \to \alpha')$

α' ist die Abwandlung von α, in der einige x durch y ersetzt werden.

α atomar.

$$x = y \to P t_1 \ldots\ldots t_n \to P \underline{t_1{}^x_y} \ldots\ldots t_n$$

$$x = y \to t_1 = t_1{}^x_y$$ ist gültig, Beweis induktiv über den Termaufbau.

$$x = y \to \underline{f}x = \underline{f}y$$

f.a. $(\mathfrak{A}, \underline{s})$ $\Big((\mathfrak{A}, s) \models P t_1 \ldots t_n \wedge x = y \implies (\mathfrak{A}, s) \models P \boxed{t_1{}^x_y} \ldots t_n\Big)$

Erinnerung:

$\Gamma \vdash \varphi$:gdw es einen Beweis von φ aus der Vor Γ gibt.

$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_i \ldots \alpha_j, \alpha_n = \varphi \rangle$

$\in \Lambda \cup \Gamma$

$\alpha_k = \underbrace{(\alpha_i \to \alpha_j)}_{\text{vorher}}$, $\underline{\alpha_i}$ vorher, α_j

$, (\alpha_i \to \alpha_j),$ $\quad , \alpha_i,$ $\quad , \alpha_j$

$(\alpha_i \to \alpha_j)$ $\quad , \alpha_j$

α_i

$$\Gamma \vdash \varphi \overset{?}{\Longrightarrow} \Gamma \models \varphi$$

<u>Korrektheitssatz</u> für Beweise:

Wenn $\Gamma \vdash \varphi$, dann $\Gamma \models \varphi$.

$\emptyset \vdash \varphi$ $\quad \emptyset \models \varphi$

Beweisskizze:

Induktion über den Aufbau von Beweisen:

Alle α_i in einem Beweis folgen aus Γ. Sei $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$

z.z. $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha_i$

1. $\alpha_i \in \Lambda$

f.a. $(\mathfrak{A}, s)$ $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha_i$

2. $\alpha_i \in \Gamma$.

$(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$ f.a. $\alpha_i \in \Gamma$ $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha_i$

3. modus ponens.