15. 12. 2010

Korrektheitssatz: Wenn $\Gamma \vdash \varphi$, dann $\Gamma \vDash \varphi$.

$(\mathfrak{A}, s)$

Hilbertkalkül

Ziel: Gdw $\Gamma \vdash \varphi$, dann $\Gamma \vDash \varphi$.

Vollständigkeit

Beweis: Induktion über die kürzeste Länge ~~$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi \rangle$~~ n eines Beweises $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi \rangle$ von φ aus Γ.

$\uparrow \quad \uparrow$

$\Gamma \quad \Lambda$

Fall 3: es gibt $i, j < n$, so dass $\varphi_i = (\varphi_j \to \varphi)$.

I.V. auf φ_i und auf φ_j liefert $\Gamma \vDash \varphi_i$ und $\Gamma \vDash \varphi_j$.

f.a. $(\mathfrak{A}, s)$: Wenn $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$, dann erfüllt $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_i \wedge \varphi_j$

$(\varphi_j \to \varphi) \wedge \varphi_j$

Also $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, und somit $\Gamma \models \varphi$. $\dashv$

Def: 1. Eine Formelmenge Γ heißt widerspruchsfrei, konsistent (consistent) :gdw es keine Formel φ gibt, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ ~~also auch~~ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Gegenteil: widerspruchsvoll.

2. Γ heißt erfüllbar (satisfiable) :gdw es eine Interpretation $(\mathfrak{A}, s)$ gibt, so dass $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$.

Korollar (zum Korrektheitssatz): Wenn Γ erfüllbar ist, dann ist Γ widerspruchsfrei.

Beweis: Ann Γ sei widerspruchsvoll. ~~Es~~ Wir nehmen φ, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Sei $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$. Dann ist nach dem Korrektheitssatz $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ und $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\varphi$.
$(\mathfrak{A}, s) \not\models \varphi$.

Also gibt es kein $(\mathfrak{A}, s)$, das Γ' erfüllt. Γ' ist unerfüllbar.

Gödel'scher Vollständigkeitssatz:

a) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar.

b) Wenn $\Gamma \models \varphi$, dann $\Gamma \vdash \varphi$.

Bew., dass a) und b) äquivalent sind:

Gelte a), und sei $\Gamma \models \varphi$. Dann ist $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ nicht erfüllbar. Dann ist nach a) $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ inkonsistent.

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \beta$ und $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\beta$.

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \beta) \wedge (\neg\varphi \to \neg\beta)}$$

$$(\neg\varphi \to (\beta \wedge \neg\beta))$$

p. 47

$\Gamma \vdash \varphi$.

b) $\Rightarrow$ a).

Sei Γ konsistent. Dann hat Γ ein Modell. p. 47.

2 mal negieren.

$\vdots$

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ Tautologie

$\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ gdw $\mathfrak{A} \not\models \varphi$

Metasätze: Sätze über das Beweisen im Hilbertkalkül

Tenor: $\vdash$ ist stark genug. 1929 Gödel

Skolem

Lemma 4.10: Metasatz über die Tautologische Impl.

Wenn Γ die Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beweist $\vdash$ α_i $i \leq n$ und

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die Formel β tautologisch impliziert, Dann $\Gamma \vdash \beta$.

Bew: $\left(\bigwedge_{i \leq n} \alpha_i\right) \to \beta$ ist eine aussagenlog. Tautologie

n mal Modus ponens ergibt:

$$\left(\left(\bigwedge_{i \leq n} \alpha_i\right) \to \beta\right) \equiv \alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\alpha_3 \dots \to (\alpha_n \to \beta))).$$

$\vdash$

$$\underbrace{\underset{\substack{\text{nach Vor.} \\ \vdots \\ \varphi_i}}{\Gamma \vdash \alpha_1} \quad \text{und} \quad \underbrace{\underbrace{\Gamma \vdash \text{''}}_{\text{nach Axiomengr. 1}}}_{\varphi_j = \varphi_i \to \underline{\underline{\varphi}}}}_{\text{m. p}}$$

$$\Gamma \vdash \alpha_2 \to (\alpha_3 \dots \to (\alpha_n \to \beta)).$$

$\vdots$

noch $n-1$ Mal wiederholen. $\dots$ $\Gamma \vdash \beta$.

$\dashv$

Lemma 4.11. Deduktionsmetasatz

Wenn $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$, dann $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$.

Bew: Induktion über den Aufbau eines Beweises von $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$.

Fall 1: $\varphi \in \Gamma \cup \{\gamma\}$.

Wenn $\varphi \in \Gamma$, dann $\Gamma \vdash \varphi$, dann $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$

$\varphi \to (\gamma \to \varphi)$

Wenn $\varphi = \gamma$. Dann ist $\gamma \to \varphi$ ~~ist~~ $\gamma \to \gamma$,

$\neg\gamma \vee \gamma$

also ist nach Axiomengr. 1 $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$.

Fall 2: $\varphi \in \Lambda$

$\Gamma \vdash \varphi$.

Fall 3: φ entsteht durch m.p. Es gibt ein ψ

$$\underbrace{\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \psi}_{\text{kürzerer Beweis}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash (\psi \to \varphi)}_{\text{kürzerer Beweis}}.$$

Die I.V., auf $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \psi$ angewandt, liefert $\Gamma \vdash (\underline{\gamma} \to \psi)$

Die I.V., auf $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash (\psi \to \varphi)$ " „$\Gamma \vdash (\underline{\gamma} \to (\psi \to \varphi))$.

Tautologie: $(\gamma \to \psi) \wedge (\gamma \to (\psi \to \varphi))$

$$\longleftrightarrow \gamma \to (\psi \wedge (\psi \to \varphi))$$

$$(\longleftrightarrow (\gamma \to \varphi))$$

vorigs Lemma: $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$

$\dashv$.

Lemma 4.12. RAA

reductio ad absurdum

Widerspruchsbeweis

Wenn $\Gamma \cup \{\varphi\}$ widerspruchsvoll ist, dann $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Beweis: Es gibt ein β, so dass $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \beta$ und $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\beta$.

Vorige Lemma: $\Gamma \vdash (\varphi \to \beta)$ und $\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\beta)$

Tautologie: 1) $\neg\beta \wedge \neg\beta \to \neg\varphi$. Kontraposition

2) $\Gamma \vdash (\underline{\neg\beta} \to \neg\varphi)$ und 3) $\Gamma \vdash (\underline{\neg\neg}\beta \to \neg\varphi)$

Tautologie-Lemma, auf 1), 2) und 3) angewandt

$\Gamma \vdash \neg\varphi$. $(\neg\neg\beta \leftrightarrow \beta)$

Lemma: <u>Erste</u> Regel über die Verallgemeinerung.

Wenn Γ die Formel ~~die~~ φ beweist, und die Variable x in keine Formel von Γ frei auftritt, dann beweist Γ die Formel $\forall x \varphi$.

Beweis: Induktion über den Aufbau von $\vdash$.

Fall 1: $\varphi \in \Lambda$. Dann ist auch $\forall x \varphi$ ein Axiom, und $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

Fall 2: $\varphi \in \Gamma$. Dann tritt nach der Var. über Γ die Variable x nicht frei in φ auf.

Axiomengr. 4. $\varphi \to \forall x \varphi$ ist ein Axiom.

$\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash (\varphi \to \forall x \varphi)$ und m.p. liefern $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

Fall 3: φ entstehe durch m.p. aus ψ und $(\psi \to \varphi)$.

I.V. (zwei Mal angewandt) liefert:

$$\Gamma \vdash \underbrace{\forall x \psi}_{1)} \quad \text{und} \quad \Gamma \vdash \overset{2)}{\forall x (\psi \to \varphi)}.$$

Axiomengr. 3: $\cancel{\forall x \varphi}$ $\underbrace{\underline{\forall x (\psi \to \varphi)} \to (\underline{\forall x} \psi \to \forall x \varphi)}_{\in \Lambda}$.

$$\Gamma \vdash \left(\underbrace{\forall x (\psi \to \varphi)}_{2)} \wedge \underbrace{\forall x \psi}_{1)}\right) \to \forall x \varphi$$

Lemma 4.10 liefert $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

Lemma 4.14. Einfache Tatsachen über die Ersetzung. (α^x_t)

(a) x kann für x eingesetzt werden in α.

Beweis: Def von $\cancel{t}$ kann für x eingesetzt werden in α

$$\forall x\, \alpha(x) \leftrightarrow \forall y\, \alpha(y)$$

(b) t kann in φ für x eingesetzt werden, wenn keine Variable von φ in t auftritt.

Beweis: ~~Die~~ Rekursive Def von „kann eingesetzt werden"

kein alter y's

(c) Wenn x, y Variablen sind und $\boxed{y \text{ nicht in } \varphi}$ auftritt,

dann kann x in $\underbrace{\varphi^x_y}_{\text{nach (b) def.}}$ für y eingesetzt werden und es gilt

$$\left(\varphi^x_y\right)^y_x = \varphi .$$

$\forall_i \; i \neq j$

(d) Wenn x, y, z Variablen sind und $\underset{v_i \quad v_j}{x \neq z}$

und t für x in φ eingesetzt werden kann, (φ^x_t def.)

dann kann t für x in φ^y_z eingesetzt werden.

(e) Wir nehmen an, dass t für x in φ eingesetzt werden kann und y eine Variable ist, die nicht in φ auftritt, und dass c ein Konstantensymbol ist. Der Term t^c_y und die Formel φ^c_y entstehen dadurch, dass man in t und in φ alle c's durch y ersetzt.

Dann kann $\underline{t^c_y}$ für x in $\underline{\varphi^c_y}$ eingesetzt werden.

Beweis: Ind. über die Ersetzungsmögl., den Aufbau von φ.

Induktionsschritt: (d).

Enderton

Lemma Zweite Regeln über die Verallgemeinerung.

Wenn $\Gamma \vdash \varphi$ und c eine Konstante ist, die nicht in Γ vorkommt ~~und nicht in φ vorkommt~~, dann

~~$\Gamma \vdash \forall x \varphi$~~ gibt es eine (neue) Variable, die nicht in φ auftritt

$$\in$$

sd $\Gamma \vdash \forall y\, \varphi_y$.

$$\uparrow$$

(e)

Beweis: Wie die Erste Regel über die Verallg.

Lemma Dritte Regel

.