17. 12. 2010

Beweisregeln: $\vdash$ ist stark genug

Metasatz über Tautologien

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$

Wenn $\Gamma \cup \{\varphi\}$ nicht konsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\varphi$ (Indir. Beweis, reductio ad absurdum)
$\qquad\qquad\quad \neg\psi \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \psi$

Dritte Regel über die Verallgemeinerung

Lemma 4.16: Wenn $\Gamma \vdash \underline{\varphi_c^x}$ und c in Γ und in φ nicht vorkommt, dann ($\Gamma \vdash \forall x \varphi$ und es gibt eine Ableitung, in der c nicht vorkommt).

Beweis: Zweite Regel über die Verallg. angewandt auf φ_c^x, liefert

$$\Gamma \vdash \forall y \left(\varphi_c^x\right)_y^c .$$

Da c in φ nicht auftritt

gilt $(\varphi^x_c)^c_y = \varphi^x_y$.

$\Gamma \vdash \underline{\forall y\, \varphi^x_y}$. Wunsch: $\Gamma \vdash \underline{\forall x\, \varphi}$.

Beh: $\forall y\, \varphi^x_y \vdash \forall x\, \varphi$

$\vdash \forall y\, \varphi^x_y \to \varphi$ ist ein Axiom der Gr. 2, für die Formel φ^x_y, $t = \cancel{y}\, x$ ~~an~~ eingesetzt für y

Γ $\qquad \varphi = (\varphi^x_y)^y_x$

Hieraus erste Regel Verallg. auf $\forall y\, \varphi^x_y \vdash \varphi$ angewandt

$\forall y\, \varphi^x_y \vdash \forall x\, \varphi$. $\square$

Lemma 4.17

Metasatz über die Umbenennung von Variablen

Sei $\underline{\varphi}$ eine Formel, t ein Term, x eine Variable

$t = t(\underline{z}, y, w \ldots)$

Dann gibt ein φ' s.d.

a) t für x in φ' eingesetzt werden kann, und

b) $\vdash \varphi \to \varphi'$ und $\vdash \varphi' \to \varphi$.

Beweis: Induktiv über den Aufbau wird φ' erzeugen.

$\forall z\, \alpha$ z in t

$\forall z'\, \alpha^{z}_{z'}$ z' neu

Übung

Gödel'scher Vollständigkeitssatz

a) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar

b) Wenn $\Gamma \models \varphi$, dann $\Gamma \vdash \varphi$. $\quad (\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi)$

Bew: a) $\Rightarrow$ b): Ann $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \nvdash \varphi$.

Dann ist $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ~~ist~~ konsistent, da wir sonst aus der RAA-Regel $\Gamma \vdash \varphi$ bekämen.

(a) gilt. Es gibt ein $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

$\lightning$ zu $\Gamma \models \varphi$.

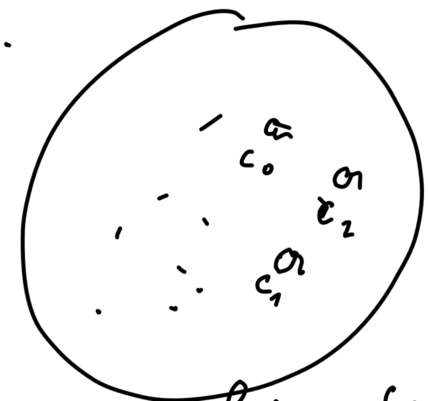
---

b) $\Rightarrow$ a): ?

Beweis von (a):

Konsistente Menge Γ. Gesucht ist eine Interpretation $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$.

Seien $c_0, c_1, \dots$ Konstantensymbole, $c_i \notin \tau$.



$s(v_i) = c_j$

Beh: Es gibt eine Formelmenge $\Delta \supseteq \overset{\substack{\mathcal{L}(\tau) \\ \rotatebox{90}{$\subseteq$}}}{\Gamma}$, $\Delta \subseteq \mathcal{L}(\underbrace{\tau \cup \{c_0, c_1, \dots\}}_{\tau'})$,

so dass

(i) $\Gamma \subseteq \Delta$

(ii) Δ ist maximalkonsistent, d.h. Δ ist konsistent
und Δ ~~ist~~ in $\mathcal{L}(\tau')$ maximal (f.a. φ $\Delta \vdash \varphi$
oder $\Delta \vdash \neg\varphi$)

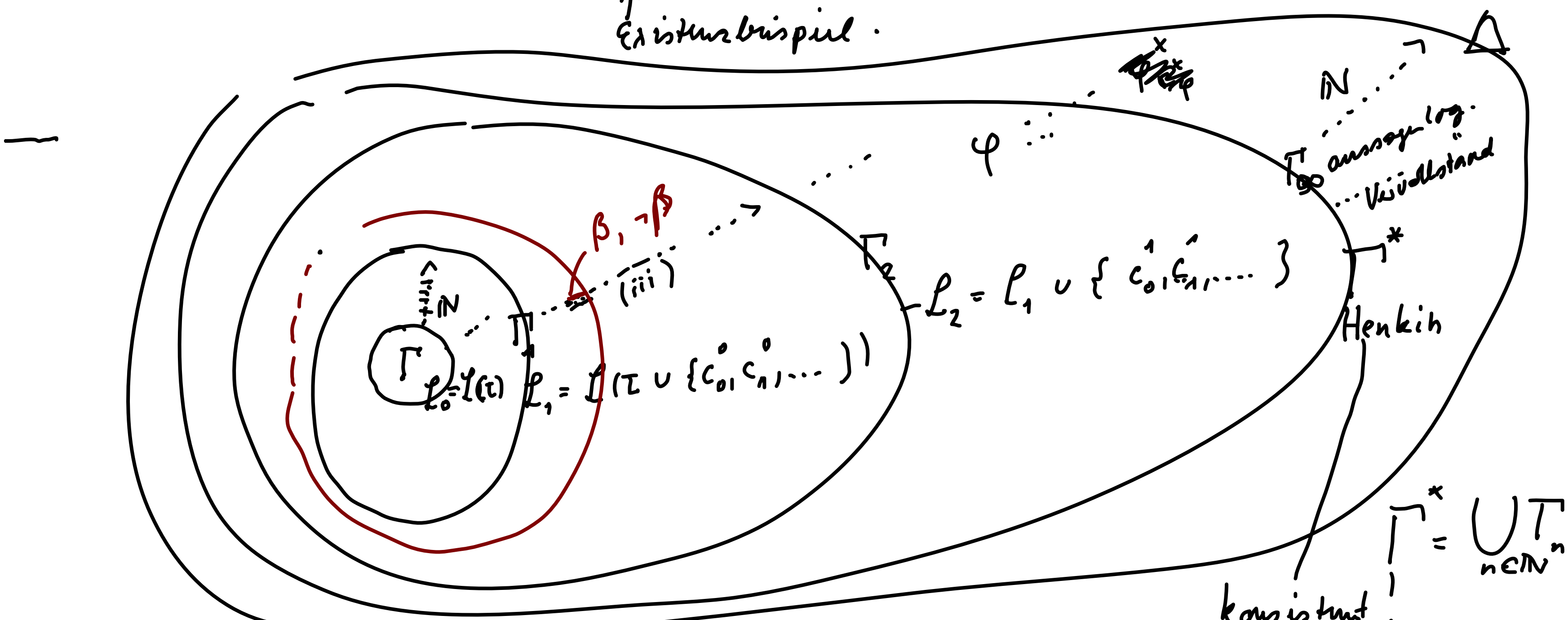
(iii) Δ ist eine Henkin-Menge, d.h.
(Leon Henkin 1949)

Δ hat Existenzbeispiele $:\Longleftrightarrow$
zu ~~jeder f. a.~~ jeder Variable x, ~~fe~~ zu jedem $\varphi \in \mathcal{L}(\tau^*)$ gibt es eine Konstante c s.d.

$$\neg \forall x \varphi \to \neg \varphi^x_c$$

$$\exists x \neg \varphi \to \neg \varphi^x_c$$

↑ Existenzbeispiel.



Für jede Formel $\varphi \in \mathcal{L}_0$, für jede Variable x wählen wir ein neues Konstantensymbol c_φ^x und wir nehmen $\neg \forall x \varphi \to \neg \varphi^x_{c_\varphi^x} \in \Gamma_1$

$$\vdots$$
$$c_i^0$$

Beh: Γ_1 ist konsistent.

Ann Indirekt: Wir nehmen ein minimales n s.d.

$$\Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \underset{\psi_{n+1}}{\beta} \quad \text{und} \quad \Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \underset{\neg\psi_{n+1}}{\neg\beta}.$$

ψ_{n+1} hat die Form: $\neg \forall x \varphi \to \neg \varphi^x_{c_\varphi^x} = \psi_{n+1}$

$$\Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \neg \forall x \varphi \wedge \varphi^x_{c_\varphi^x}.$$

$$\frac{\Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \neg \forall x \varphi}{\Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \varphi^x_{c_\varphi^x}}.$$

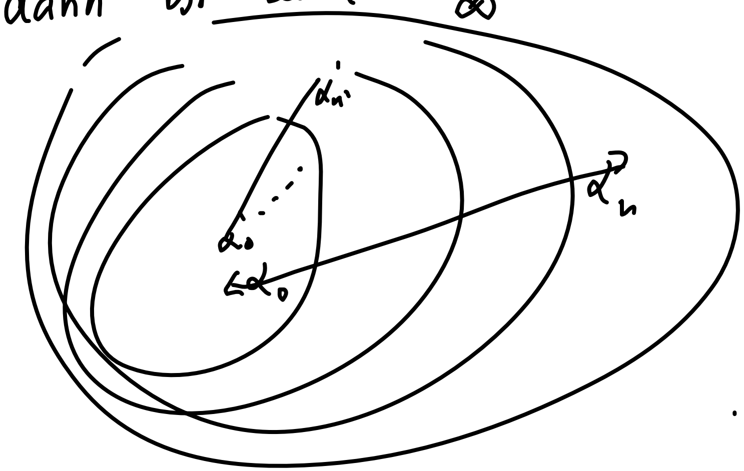
Dritte Regel $\dfrac{\Gamma_0 \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \forall x \varphi}{}$

(um 1 kleiner inkonsistent

Iterieren: Wenn Γ_i konsistent ist, so auch Γ_{i+1}.

Wenn alle Γ_i konsistent sind und $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$,

dann ist auch $\Gamma_\infty = \Gamma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ konsistent.



Γ^* ist konsistent und erfüllt Wunsch (iii).

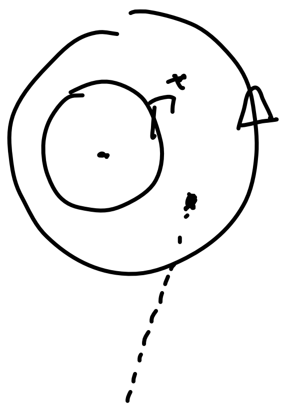
Da ~~ve~~ $\varphi \in \Gamma^* \Rightarrow$ ex i $\varphi \in \Gamma_i$ und $\varphi^x_{c^x_\varphi} \in \Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma^*$.

$\Delta \supseteq \Gamma^*$

$\subseteq \mathcal{L}(\tau^*)$. $\quad \tau^* = \tau \cup \{ c^i_n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \}$

c^φ_x

Alle $\Delta \supseteq \Gamma^*$ haben die Henkin-Eigenschaft. ✓



$\varphi_1 \quad x \quad (\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi\frac{c^x}{y})$

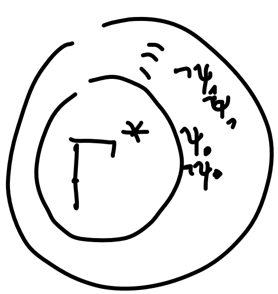
$\cancel{\varphi \notin \Gamma^*}$

$\varphi \in \mathcal{L}^*$

kein neuen Henkin-Aufgaben

Es gibt Δ maximalkonsistent. $\Delta \supseteq \Gamma^*$.

Aufzählung von $\mathcal{L}(\tau^*) = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$



Wir def. induktiv über n φ_n.

Falls $\Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\} \cup \{\psi_n\}$ konsistent ist,

dann $\varphi_n = \psi_n$. .... $\underline{\Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\}} \vdash \underline{\neg\psi_n}$

Andernfalls $\underline{\neg\psi_n} = \varphi_n$ $\quad \Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots \varphi_{n-1}, \neg\psi_n\}$

Beh: $\Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ ist konsistent.

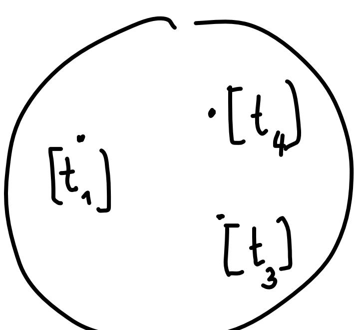
I.V. $\Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\}$ ist konsistent. Dann trifft ein Fall unserer induktiven Def von φ_n zu. In jedem der beiden Fälle ist $\Gamma^* \cup \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ ..

Δ gefunden $\quad \Delta = \Gamma^* \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Def: Auf den $\mathcal{L}(\tau^*)$-Termen definieren wir

$t_1 \approx t_2$:gdw $\Delta \vdash t_1 = t_2$ (oder $t_1 = t_2 \in \Delta$)

$[t_1] := \{t_2 \mid t_2 \approx t_1\} \subseteq \mathcal{L}(\tau^*)$-Terme.



Lemma $\approx$ ist eine Äquivalenzrel. auf den $\mathcal{L}(\tau^*)$-Termen.

Bew: ~~Symmetrie~~ Refl. $t_1 \approx t_1$ $\quad t_1 = t_1 \in \Delta$.

$$\Delta \vdash \underbrace{t_1 = t_1}_{\in \Lambda}$$

Symmetrie: $t_1 \approx t_2 \overset{\Longrightarrow}{\cancel{\text{(und)}}} t_2 \approx t_1$

$\cancel{\Rightarrow t}$

Gruppe 6

$t_1 = t_2 \in \Delta \overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \Delta \vdash t_1 = t_2 \quad \dots \quad \Delta \vdash t_2 = t_1$

$t_3 = t_2$

$x = y \to (\alpha \to \alpha')$

Transitiv: $t_1 \approx t_2$ und $t_2 \approx t_3 \Rightarrow t_1 \approx t_3$

$$\Delta \vdash t_1 = t_2 \land t_2 = t_3 \Longrightarrow \Delta \vdash t_1 = t_3.$$

Lemma: $\approx$ ist eine $\mathcal{L}(\tau^*)$-Kongruenzrel., d.h.

f.a. Relation R in τ^* und alle $t_1, \dots, t_n$, ~~gilt~~ und $t'_1, \dots, t'_n$ gilt

f.a. $i \leq n$ $t_i \approx t'_i$ $\Rightarrow$ $\left(R t_1 \dots t_n \in \Delta \iff R t'_1 \dots t'_n \in \Delta \right)$.

$\left(\text{Bew: } \Delta \vdash \left(\bigwedge t_i \doteq t'_i \wedge R t_1 \dots t_n \right) \rightarrow R t'_1 \dots t'_n \right)$

$\vdots$

und f.a. Funktionssymbole $f \in \tau^*$ und alle $t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, t'_1, \dots, t'_n, t'_{n+1}$ gilt

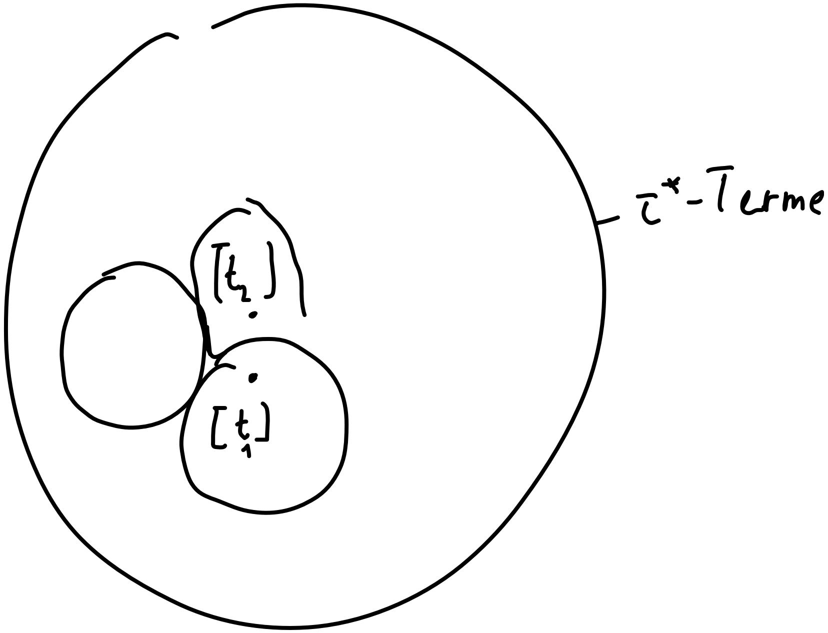
f.a. $i \leq n+1$ $t_i \approx t'_i$:

$f t_1 \dots t_n = t_{n+1} \in \Delta \iff f t'_1 \dots t'_n = t'_{n+1} \in \Delta$

$\left(\text{Bew } \Delta \vdash \left(\bigwedge_{i \leq n+1} t_i = t'_i \wedge f t_1 \dots t_n = t_{n+1} \right) \rightarrow f t'_1 \dots t'_n = t'_{n+1} \right)$

für jedes $c \in \tau^*$ gilt f.a. t_1, t'_1:

$t_1 \approx t'_1$ und $c = t_1 \in \Delta \Rightarrow c = t'_1 \in \Delta$.



Def von $(\mathfrak{A}, s)$

$A = \{ [t] \mid t \ \tau^*\text{-Term} \}$ $\qquad c^{\mathfrak{A}} = [c]$

$s(v_i) = [v_i] \in A.$ $\qquad \bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}, \quad \bar{s}(f t_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$

$P^{\mathfrak{A}} := \{ ([t_1], \dots, [t_n]) \in A^n \mid P t_1 \dots t_n \in \Delta \}$ wohldef.

$f^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) = [t_{n+1}]$:gdw $f t_1 \dots t_n = t_{n+1} \in \Delta$

$$(\underset{\tau^*}{\mathfrak{A}}, s) \overset{!}{\models} \underbrace{\Delta}_{\tau^*} \supseteq \underset{\tau^*}{\Gamma^*} \supseteq \underset{\tau}{\Gamma}.$$

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright \{X \mid X \in \tau\}, s) \models \Gamma$$

P, f, c

Beweis: Induktion über $\underline{\varphi \in \mathcal{L}(\tau^*)}$ zeigen wir

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \iff \varphi \in \Delta$$

Induktionsanfang:

Zwischenschritt: f.a. $\mathcal{L}(\tau^*)$-Term t gilt $\bar{s}(t) = [t]$.

Anfang
$\bar{s}(v_i) = [v_i]$
$\bar{s}(c) = [c]$

Induktionsschritt: $\bar{s}(f t_1 \dots t_n) \overset{\text{Def}}{=} f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$

$\overset{\text{I.V.}}{=} f^{\mathfrak{A}}([t_1], \dots, [t_n]) \underset{\text{von } f}{\overset{\text{Def}}{=}} [f(t_1, \dots, t_n)]$

Atomare Formeln.

$\forall$- Schritt. ..... Henkin-Eigenschaft.