22.12.2010

Am 12.1.2011 fällt die Vorlesung aus!

Geben Sie die Übungen am 10.1. oder am 12.1. in den Übungsgr. ab.

Am 28.1.2011 findet eine Vorlesung statt.

Abstimmung:

PRIM $\in P$	12 -
Gödelsche Unvollst. sätze	—
Log. Programmieren	

Gödel'scher Vollständigkeitssatz

b) Wenn $\Gamma \models \varphi$, dann $\Gamma \vdash \varphi$

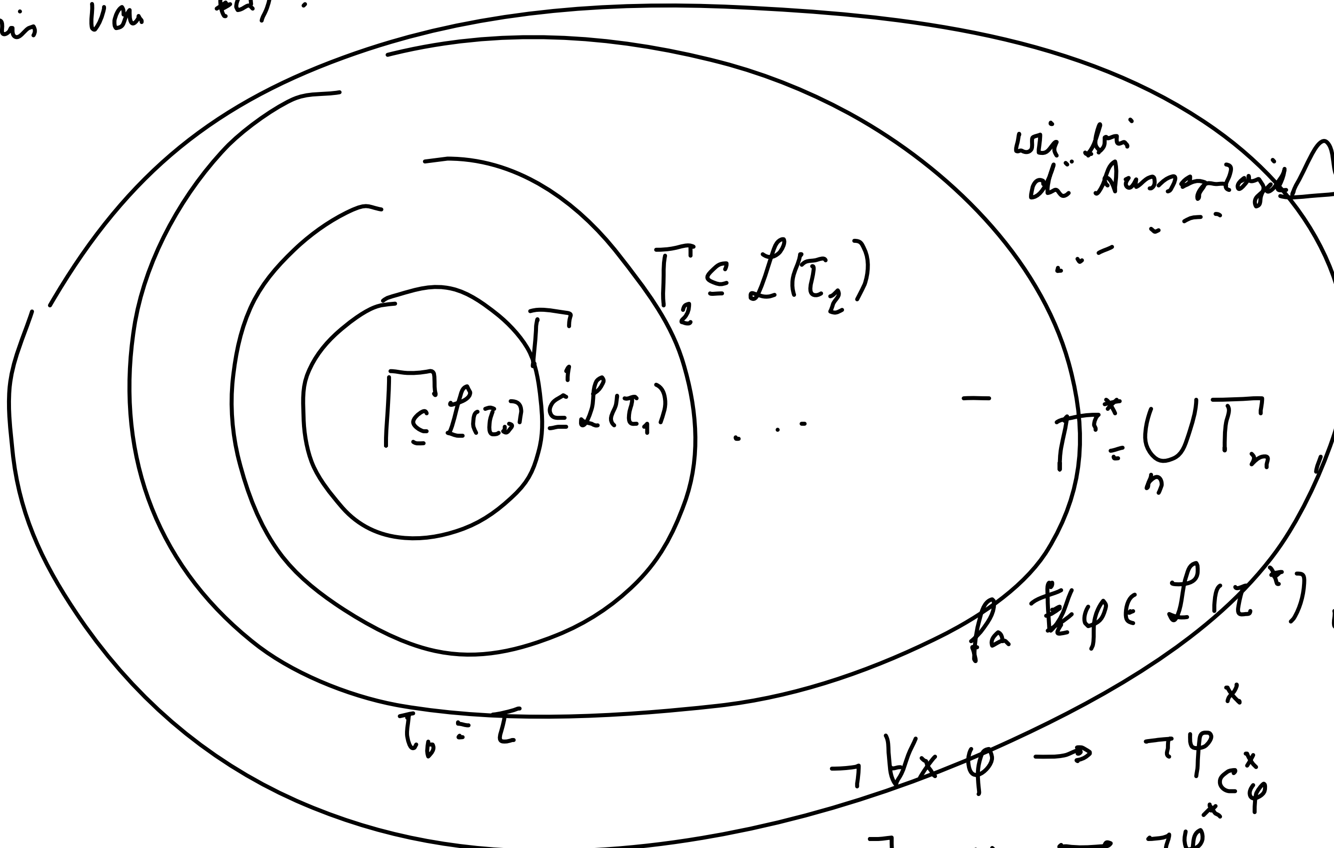
(*) a) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar.

a) $\Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ a): $\Gamma \not\vdash$ Sei Γ konst. und nicht erfüllbar. Dann nehmen wir φ s.d. $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \models \neg\varphi$. b) gilt. $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Also zeigt φ, dass Γ widerspruchsvoll ist. $\lightning$.

Beweis von 7a):



$\Gamma^* = \bigcup_n \Gamma_n$, $\tau^* = \bigcup_n \tau_n$

f.a. $\forall x \varphi \in \mathcal{L}(\tau^*)$, f.a. x Variable

$\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi^x_{c^x_\varphi} \in \Gamma^*$

$\exists x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi^x_{c^x_\varphi}$

Γ^* hat Existenzbeispiele

ist eine Henkin-Menge

Δ konsistent und $\forall \varphi \in \mathcal{L}(\tau^*)$
$(\varphi \in \Delta$ oder $\neg \varphi \in \Delta)$.

$\exists v_0 \quad v_0 = v_0$

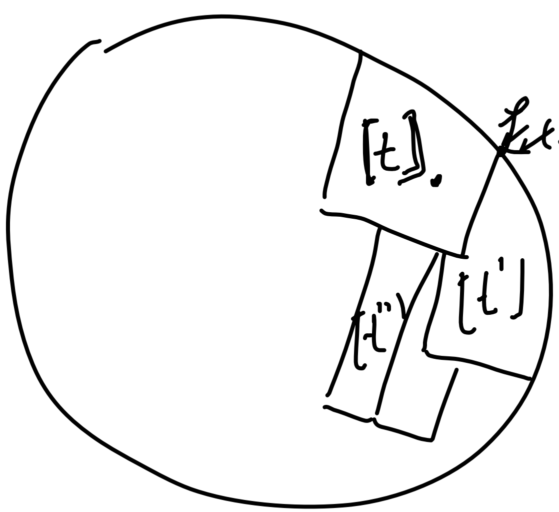
Δ glg.

Def $(\mathfrak{A}, s)$

$$A = \{ [t] \mid t \quad \mathcal{L}(\tau^*)\text{-Term} \}$$

$$t \approx t' \quad :\Leftrightarrow \quad t = t' \in \Delta$$

$$[t] = \{ t' \in T_{(\tau^*)} \mid t' \approx t \} = t/_{\approx}$$



$\{ t \mid t \quad \tau^*\text{-Term} \}$

$$s(v_i) = [v_i]$$

$$s(c) = [c] \quad \text{für } c \in \tau^*$$

$$\tau^* \supsetneq \tau$$

$P \in \tau$

$P^{\mathfrak{A}}(\underbrace{[t_1], \ldots, [t_n]}_{\in A^n}) \;:\Leftrightarrow\; Pt_1 \ldots t_n \in \Delta$ falls $t_i = t_i' \in \Delta$ für $i \leq n$,

dann $Pt_1' \ldots t_n' \in \Delta$

$f^{\mathfrak{A}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [t_{n+1}] \;:\Leftrightarrow\; ft_1 \ldots t_n = t_{n+1} \in \Delta$

Lemma: $(\mathfrak{A}, s) \models \Delta$ erfüllt.

Lemma: F.a. φ $\big((\mathfrak{A}, s) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Delta\big)$.

$\forall x \psi$

ψ, ψ'

Beweis: Ind. über den Aufbau von φ.

$\varphi = (\psi \to \gamma)$

$(\mathfrak{A}, s) \models (\psi \to \gamma) \quad \overset{\text{Def}}{\underset{\text{von} \models}{:\Longleftrightarrow}} \quad$ Wenn $(\mathfrak{A}, s) \models \psi$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$.

$\overset{\text{I.V.}}{\underset{\text{des Lemmas}}{\Longleftrightarrow}}$ Wenn $\psi \in \Delta$, dann ist $\gamma \in \Delta$

$\overset{\Delta \text{ Maximalität}}{\Longrightarrow} (\psi \to \gamma) \in \Delta$ (Sonst: Weil Δ max ist, folgt aus $\psi \to \gamma \notin \Delta$, $\neg(\psi \to \gamma) \in \Delta$, also $(\psi \wedge \neg\gamma) \in \Delta$, also $\neg\gamma \in \Delta$

$\gamma \in \Delta$ und $\neg\gamma \in \Delta$ $\lightning$)

$\Longleftarrow$ $(\psi \to \gamma) \in \Delta$

$(\psi \to \gamma) \in \Delta$ und $\psi \in \Delta$, Δ ist gegen $\vdash$ abgeschl.

Also $\gamma \in \Delta$.

$\varphi = \forall x \psi$

$(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \psi.$

Wähle c, s.d. $\neg \forall x \psi \to \neg \psi^x_c \in \Delta$.

Axiom $\forall x \psi \to \psi^x_t$, falls t in ψ für x eingesetzt werden kann.

$c = t$ c hat kein Variablennamen, also darf c in ψ für x eing. werd.

„$\Longrightarrow$"

$[c] \in A$. $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \psi \overset{\text{Def}}{\underset{\text{von } \models}{\Longleftrightarrow}}$ f.a. $[t] \in A$ gilt

$(\mathfrak{A}, s(x|[t])) \models \psi$. Speziell: $[t] = [c]$.

$(\mathfrak{A}, s(x|[c])) \models \psi$. Substlemma $(\mathfrak{A}, s) \models \psi^x_c \overset{\text{I.V.}}{\Longleftrightarrow} \psi^x_c \in \Delta$

Beh: $\forall x \psi \in \Delta$.

Sonst: $\neg \forall x \psi \in \Delta$

$(\neg \forall x \psi \to \neg \psi^{x}_{c}) \in \Delta$ $\Big\}$ Δ max. konsi. $\quad \neg \psi^{x}_{c} \in \Delta$ ↯

Also $\forall x \psi \in \Delta$.

"$\Longleftarrow$" $(\mathfrak{A}, s) \not\models \forall x \psi$ $\quad \left(\overset{\text{Def}}{\underset{\text{von } \models}{\Longleftrightarrow}} (\mathfrak{A}, s) \models \neg \forall x \psi \right)$

$\overset{\text{Def}}{\underset{\text{von } \models}{\Longleftrightarrow}}$ es gibt ein $[t] \in A$ s.d. $(\mathfrak{A}, s(x \mid \underbrace{[t]}_{\bar{s}(t)})) \models \neg \psi$.

$\Longleftrightarrow (\mathfrak{A}, s(x \mid [t])) \models \neg \psi'$

Wunsch: $(\mathfrak{A}, s) \models \neg \psi^{x}_{t}$.

$(\mathfrak{A}, s) \models \neg \psi'^{x}_{t}$

Der Wunsch wird erfüllt, wenn t in $\underbrace{\psi}_{\psi'}$ für x einsetzbar ist.

Dann gilt das Ersetzungslemma.

alle

Lemma: Es gibt ψ', s.d.

a) $\psi \vdash \psi'$ und $\psi' \vdash \psi$

b) t in ψ' für x eingesetzt werden kann.

(und ψ' auch einfach als φ ist,
ψ' genauso $\underset{\text{weniger}}{\text{viele}}$ Aufbauschritte braucht wie ψ.)

$$(\mathfrak{A}, s) \models \neg {\psi'}^{x}_{t} .$$

Induktionsvor. des Lemmas: $\neg {\psi'}^{x}_{t} \in \Delta$. $\quad {\psi'}^{x}_{t} \notin \Delta$.

$\underbrace{\forall x \psi' \to {\psi'}^{x}_{t}}_{\in \Delta}$ ist ein Axiom der Gr. 2.

$\in \Delta$. Also $\forall x \psi' \notin \Delta$.

$\psi \vdash \psi'$

$\forall x \psi \vdash \forall x \psi'$, wegen Axiom 4.

$\forall x \psi \notin \Delta$, da

$\forall x \psi \to \forall x \psi' \in \Delta$

$\square$

$\in \mathcal{L}(\tau)$

$\Gamma \models \varphi$?

Technikentwicklung

Spekulier auf ja

$\Gamma \vdash \varphi$

spekulier auf nein

Baue $(\mathfrak{A}, s)$, so dass $(\mathfrak{A}, s) \models \underset{ZFC}{\Gamma}$ und $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\varphi$.

$\aleph_1$

und unendl.

nicht abz

"$\Updownarrow$"

Histor.

$\underline{ZFC} \overset{?}{\models} |\mathbb{R}| = \aleph_1 = \omega_1$, die kleinste überabz. Mächtigkeit

Kontinuumshypothese, CH

1940 Gödel

1963 Cohen.

$ZFC \cup \{CH\}$ kons.

$ZFC \cup \{\neg CH\}$ kons.

φ, Γ nicht in der Sprache erster Stufe

$\Gamma \models \varphi$

analog über Modelle def.

⋮

Hintergrund so groß, bis alle abzuquantifizierenden

Punkte sind Probleme

Punkte sind aus einer Potenzmenge

Objekte Elemente einer Trägermenge sind

Erststufig weiter.

$\vdash \exists x \forall y\, \varphi \rightarrow \forall x\, \exists y\, \varphi$

im Kalkül.

4.4. Korollare aus dem Vollständigkeitssatz

<u>Satz</u> Kompaktheitssatz. Sei $\Gamma \subseteq \mathcal{L}(\tau)$ eine Formelmenge

a) Wenn jede endl. Teilmenge von Γ erfüllbar / konsistent ist,
dann ist Γ erfüllbar / konsistent. $\Gamma \vdash \beta$, $\Gamma \nvdash \neg\beta$

b) Wenn $\Gamma \models \varphi$ / $\Gamma \vdash \varphi$, dann gibt es eine endl. Tm. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$,
so dass $\Gamma_0 \models \varphi$. Nehme einen Beweis $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi \rangle$ von φ aus Γ.

$\Gamma_0 = \{ \alpha_i \mid \alpha_i \text{ in } \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi \rangle$ ~~ein Beweis~~ und $\alpha_i \in \Gamma \}$

(a): erfüllbar $\overset{\text{Vollständigkeit}}{\underset{\text{Korrektheit}}{\Longleftrightarrow}}$ konsistent

(b): $\models \;\Rightarrow\; \vdash$.

Anwendung:

Sei Γ eine Satzmenge.

Wenn Γ beliebig große endliche Modelle hat, dann hat Γ ein unendliches Modell.

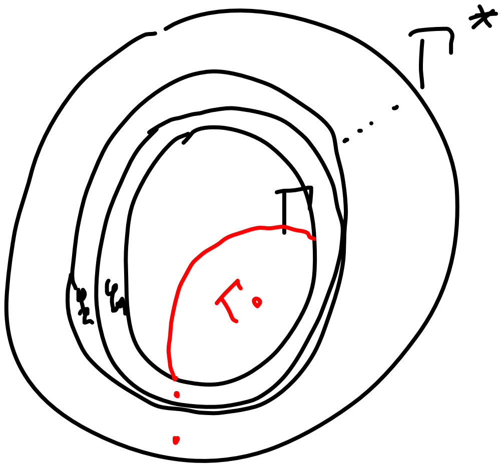
Bew: $\varphi_n :=$ „es gibt mind. n Elemente"

$$\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1} \left(\bigwedge_{0 \le i < j < n} v_i \neq v_j \right)$$

$$\Gamma^* = \Gamma \cup \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0 \}$$

Beh: Γ^* ist erfüllbar.

Nach dem Kompaktheitssatz reicht es, zu zeigen, dass jede endl. Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$ erfüllbar ist.



ex N, s.d.

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cup \{ \varphi_i \mid i \le \underset{\in \mathbb{N}}{N} \}.$$

Voraussetzung: Γ hat beliebig große endl. Modelle.

N

es gibt ein $\mathfrak{A} \models \Gamma$, mit $|A| \geq N$

$\#A \geq N$

$\mathfrak{A} \models \Gamma_0$. $\square$

$\tau = \{0, 1, +, \cdot\}$

Ist $\{\varphi \in \mathcal{L}(\tau) \mid \emptyset \vdash \varphi\}$ entscheidbar?

Nein. 1. Gödel'sche Unvollständigkeitssatz

Ist $\{\varphi \in \mathcal{L}(\tau) \mid \vdash \underline{\varphi}\}$ rekursiv aufzählbar?

Hilbertkalkül

Ja.

Falls τ unendlich, fordern wir, dass

$\{(P, n) \mid P \in \tau,\ P$ n-stelliges Präd.$\}_{n \in \mathbb{N}} \cup$

$\{(f, n) \mid f \in \tau,\ f$ n-stellig$,\ n \in \mathbb{N}\} \cup$

$\{c \mid c \in \tau,$ Konst$\}$ ... entscheidbar ist.

Maximale ~~abz~~ unendl. Symbolmg

$$\{ P^n_k \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{N} \} \cup$$

(P, n, k)

$$\{ f^n_k \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{N} \} \cup$$

$$\{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \}$$