## FEHLERLISTE ZUM SKRIPTUM

Def. 1.4 $n$-stellige Funktion

Lemma 1.5 $\mathbb{N}$ statt $\omega$

$(*)$ im Beweis zu 1.8. soll lauten: „...hat strikt mehr Linksklammern als Rechtsklammern oder enthält nur $\neg$-Zeichen."

Im Kommutativgesetz für Boole'sche Algebren steht ein falscher Junktor.

p. 12 Mitte $U \subseteq B$

p. 16 in der Turingtafel:
$\delta(q_0, 0) = (q_1, \emptyset, R)$
$\delta(q_2, \emptyset) = (q_4, \emptyset, L)$

$A(M)$

$\hat{\delta}$ soll die Turingtafel der nicht deterministischen Maschine heißen

Im Beweis des Satzes von Cook: Sei $N$ eine nicht det. $n^k$-Turingmaschine, die immer genau nach $n^k$ Schritten hält und nicht früher.

$\varphi_{\text{Zelle}}$ Klammer am Ende falsch

17.11. morgens. $2 - SAT$ ist schlecht geschrieben, Entschuldigung. Bitte ersetzen Sie dies durch die Version aus der Vorlesung. Ich werde eine neue Version in die Überarbeitung des Skripts schreiben.

**Theorem 0.1.** *2-SAT ist in P.*

Beweis: Am leichtesten geht es mit der Resolutionsmethode, die wir in Kapitel 8 kennenlernen werden. Es gibt hierzu auch Hinweise in Exercise 36 in Schönings Buch. Formeln in KNF mit höchstens zwei Literalen pro Konjunktionsglied heißen *Krom-Formeln.* Horn-Formeln (siehe Kapitel 8) sind spezielle Krom-Formeln.

Skizze einer etwa $O(n^9)$-Zeit-Turingmaschine: Sei $\varphi = \bigwedge_{i<I}(a_{i,1} \vee a_{i,2})$ gegeben und $a_{i,j} = A_k$ oder $= \neg A_k$ für Satzvariablen $A_0$ bis $A_n$, $n \leq |\varphi|$. Wir berechnen einen gerichteten Graphen $(V, E) = (\{A_i : i \leq n\} \cup \{\neg A_i : i \leq$

*Date*: 17.11.2010.

$n\}, E)$, so dass $((a,b) \in E$ und $(\neg b, \neg a) \in E)$ gdw $(\neg a \vee b)$ ein Konjunktionsglied von $\varphi$ ist oder $(b \vee \neg a)$ ein Konjunktionsglied in $\varphi$ ist. Falls $(\neg)a \vee (\neg)a$ Konjuktionsglied ist, setzen wir $\bar{v_0}(a) = W(F)$ und $\bar{v_0}(\neg a) = F(W)$. (Mit $a = A_i$ oder $\neg A_i$ und dann $\neg a = A_i$.)

Wir erweitern nun in $(2n)^5$ Schritten die Kantenmenge um jeweils eine Kante oder um keine Kante.

1. Wir setzen $E = F_0$.

2. Sei vor dem Schritt $s$ der Graph $(V, F_s)$ gegeben, $F_s \supseteq E$, $v_s \supseteq v_0$. Wir wählen drei Vertizes $a, b, c \in V$, die durch eine Schrittnummerierung für den Schritt $s$ estimmt werden, so dass jedes der $(2n)^3$ Tripel $(2n)^2$ oft vorkommt. Dann fügen wir $(a,c) \in F_{s+1} \setminus F_s$ gdw $(a,b) \in F_s$ und $(b,c) \in F_s$ und $(a,c) \notin F_s$. Falls $v_s(a) = W$ und $(a, (\neg)b) \in F_{s+1}$, setzen wir $v_{s+1}(b) = W(F)$ und $v_{s+1}(\neg b)$ gepiegelt. Falls $v_s(a) = F$ und $(\neg a, (\neg)b) \in F_{s+1}$, setzen wir $v_{s+1}(b) = W(F)$ und $v_{s+1}(\neg b)$ gespiegelt. Falls $(a, \neg a) \in F_{s+1}$, setzen wir $v_{s+1}(a) = F$, falls $(\neg a, a) \in F_{s+1}$, setzen wir $v_{s+1}(a) = W$.

3. Falls $F_{s+1} \supsetneq F_s$ und $v_{s+1}$ eine partielle Wahrheitsbelegung ist, gehe zu Schritt 2.

4. $\varphi$ is erfüllbar gdw für kein Literal $a$, $(\neg a, a)$ $(a, \neg a) \in F_s$ und für kein Literal $a$, $v_s(a) = W$ und $v_s(A) = F$.

Da $|F_s| \leq n^2$, braucht man $\leq n^4$ Schritte, um zu prüfen, ob für kein Literal $a$, $(\neg a, a) \in F_s$ $(a, \neg a) \in F_s$.

Wir beweisen die Korrektheit des Algorithmus, indem wir zeigen, dass wir nach positiver Prüfung einen weiteren Algorithmus anschließen können, der eine Wahrheitsbelegung ermittelt, die $\varphi$ wahr macht.

Wir arbeiten nun $O(n^2)$-viele Schritte zur Erstellung einer Belegung: Sei $F_{s+1} = F_s$ und sei $v_{s+1} = v_s$.

$A_i$ heißt positiv entschieden, wenn $(\neg A_i, A_i) \in F_s$, wenn $v_{s+1}(A_i) = W$, und $A_i$ heißt negativ entschieden, wenn $v_{s+1}(A_i) = F$. Sonst heißt $A_i$ unentschieden. Wie nehmen die erste unentschiedene Satzvariable und setzen $v_{s+2} \supseteq v_{s+1}$ und $v_{s+2}(A_j) = W$ und $v_{s+2}((\neg)A_k) = W$ gdw $(A_j, (\neg)A_k) \in F_s$. Wir behaupten, dass $\varphi$ erfüllbar ist gdw $\varphi(A_j = W)$ erfüllbar ist. Sonst gibt es ein $A_k$, so dass $(A_j, A_k)$ und $(A_j, \neg A_k)$ beide in $F_s$ vorkommen. Dann ist aber $A_j \to A_k$ und $A_j \to \neg A_k$ und auch $A_k \to \neg A_j$ eine Konsequenz von $\varphi$, und somit auch $(A_j, \neg A_j) \in F_s$ und $A_j$ negativ entschieden, im Widerspruch zu Unentschiedenheit von $A_j$ unter der Belegung $v_{s+1}$. So machen wir induktiv weiter mit der Erweiterung der Belegungen $v_{s+i}$ und der Erhaltung der (Nicht-)Erfüllbarkeit, bis alle unentschiedenen Variablen belegt sind. Dies geht $r \leq n$ Schritte und das Verfahren endet mit einer Belegung $v_{s+1+r}$, die $\varphi$ wahr macht. $\dashv$