18. 1. 2012

Symbole

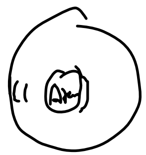
Terme $\quad f\, t_1 \dots t_n$

$\uparrow$

Fkt

Def 3.3 Atomare Formeln sind Formeln der Form $Pt_1 \dots t_n$ mit einem n-stell. Relat. symb $P \in \tau_t$ und τ-Termen $t_1, \dots, t_n$, und Formeln der Form $t_1 = t_2$.

Def 3.4. Die Menge der $\mathcal{L}(\tau)$-Formeln, τ-Formeln, $\mathcal{L}(\tau)$, ist die kleinste Menge mit folg. Eig.:



1. Jede atomare Formel ist eine Formel.
2. Wenn φ eine Formel ist, dann auch $\neg\varphi$. $(\sim\varphi)$
3. Wenn φ und ψ Formeln sind, so auch $(\varphi \to \psi)$
4. Wenn φ eine Formel ist und v eine Variable ist, dann ist $\forall v \varphi$ eine Formel.

Lemma 3.5

Keine Formel ist ein echtes Anfangsstück einer (anderen) Formel.

Beispiele: $\in$ zweistellige Relation

$$v_1 \in v_2 \quad \hat{=} \quad \in v_1 v_2$$

$$\forall v_1 \; v_1 \in v_2$$

$$\forall v_3 \; v_1 \in v_2$$

$\in v_1 v_2 v_3$ keine Formel

$$\forall x \; x = 5$$
$$\forall y \; y = 5$$

Def: Sei v eine Variable, φ eine Formel. „v tritt ~~in~~ frei in φ auf" ($v \in fr(\varphi)$) g.d.w.:

1. Wenn φ atomar ist, dann tritt v frei in φ auf gdw v in φ vorkommt.
2. $v \in fr(\neg\varphi) \;:\Leftrightarrow\; v \in fr(\varphi)$
3. $v \in fr((\varphi \to \psi)) \;:\Leftrightarrow\; v \in fr(\varphi) \cup fr(\psi)$
4. $v \in fr(\forall v_i \, \varphi) \;:\Leftrightarrow\; v \in fr(\varphi) \setminus \{v_i\}$

Def. Wenn $\mathrm{fr}(\varphi) = \emptyset$ ist, so heißt φ Satz.

Beispiel: $\forall v_0 \, \exists v_1 \, (v_1 > v_0 \wedge$ „v_1 ist prim“$)$

$\neg \exists v_2 \, \exists v_3 \, (\underbrace{\underbrace{v_2 \cdot v_3}_{\text{Term}} = v_1}_{\text{Formel}} \wedge (v_2 \neq 1 \wedge v_3 \neq v_1))$

$\neg v_2 = 1$

$\exists v_i$ Abk. für $\neg \forall v_i \neg$

$(\varphi \vee \psi)$ Abk. f. $\underbrace{(\neg\varphi \rightarrow \psi)}$

$\neg\neg\varphi \vee \psi$

$(\varphi \wedge \psi)$ Abk. f. $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$t_1 = t_2$ „Abk“ f. $= t_1 t_2$

$t_1 \neq t_2$ „ „ $\neg = t_1 t_2$

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$?

$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \not\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$

Wahrheiten und Modelle

Strukturen

<u>Def</u>: Eine Struktur $\mathfrak{A} = \mathcal{A} = (A, (P^{\mathfrak{A}})_{P \in \tau}, (f^{\mathfrak{A}})_{f \in \tau}, (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \tau})$

nicht leere Menge

ist ein Tupel mit einer nicht leeren Menge A, genannt der Träger von $\mathfrak{A}$
das Universum von $\mathfrak{A}$
die Grundmenge von $\mathfrak{A}$,

und mit folg. Eigenschaften:

$P^{\mathfrak{A}} \subseteq \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n}$ für P n-stell. Relationssymbol aus τ.

$f^{\mathfrak{A}}: A^n \longrightarrow A$ n-stell (totale) Fkt.

Beispiel: Multiplikation

$c^{\mathfrak{A}} \in A$ {\mathfrak A) ... {\mathcal A}

Schreibweise: $A = |\mathfrak{A}| = |\mathcal{A}|$

Zu definieren:

„φ ist in $\mathfrak{A}$ wahr"

geht nicht, wenn φ freie Variable hat.

Zu definieren

„φ ist in $\mathfrak{A}$ mit der Belegung $s : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$ wahr"

Abk. $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

$\mathfrak{A}$ mit s erfüllt φ

$\mathfrak{A} \models \varphi[s]$

$t_1 = t_2$

$v_1 + v_2 = v_3$

$\in A$?

<u>Def</u>: Fortsetzung von s auf τ-Terme wird für $\mathfrak{A}$ definiert:

1. $\bar{s}(v) = s(v)$
2. $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}} \in A$
3. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind und f ein n-stell. Fktsz.

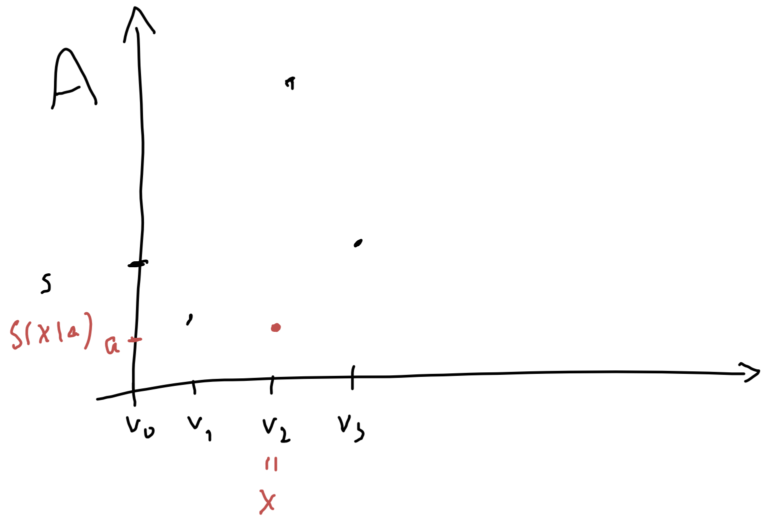
$\bar{s}(f t_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in A$

5^7, $f(5, 7, \ldots)$

Def: Sei $s : \{v_0, \dots\} \to A$ eine Belegung.

$s(x\,|\,a)$ wird def. durch $s(x|a)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{falls } y \neq x \\ a & \text{falls } y = x \end{cases}$

$s\left(\frac{a}{x}\right)$, $s\left(x \backslash a\right)$



Def: $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ wird induktiv über φ def., gleichzeitig für alle Belg. s.

1. φ atomar.

$(\mathfrak{A}, s) \models t_1 = t_2$: gdw $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

$v_1 = v_2$ $s(v_1) = s(v_2)$

$(\mathfrak{A}, s) \models P t_1 \dots t_n$: gdw $(\underbrace{\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \dots, \bar{s}(t_n)}_{\in A^n}) \in \underbrace{P^{\mathfrak{A}}}_{\subseteq A^n}$

$1+1 < 1+1+1$

3. $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\varphi \quad :\Leftrightarrow$ nicht $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

$(\mathfrak{A}, s) \models (\varphi \to \psi) \quad :\Leftrightarrow$ Wenn $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \psi$.

$(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\, \varphi \quad :\Leftrightarrow$ Für alle $a \in A$ $(\mathfrak{A}, s(x|a)) \models \varphi$

$\forall x\, \varphi(x)$ $\quad\quad x = a \quad \models \varphi(x)$

$(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma \quad :\Leftrightarrow$ f.a. $\varphi \in \Gamma$ $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ $\quad\quad (\mathfrak{A}, s(x|a)) \models \varphi[a]$

$\models$ „erfüllt"

\models

„$(\mathfrak{A}, s)$ ist ein Modell von φ" für $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

Def: Sei Γ eine Formelmenge, und sei φ eine Formel.
$\Gamma \models \varphi$, φ folgt aus Γ, Γ impliziert φ wird definiert durch:
Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ der Sprache von $\Gamma \cup \{\varphi\}$ und für jede A-Bel. s gilt: Wenn $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$, dann $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$.

Γ Gruppenaxiom $\qquad \tau = \{\circ, e\}$

$\varphi = \forall v_0 \forall v_1 \quad v_0 \circ v_1 = v_1 \circ v_0$

$\Gamma \models \varphi$?

Falsch: Permutationsgr.

$G = \cancel{\{1, 2, 3, 4, 5\}}$ alle Bijektion von 5 auf 5

$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\circ$ = Komposition.

$b_1 = 1 \to 2$ und $2 \to 1$

$b_2 = 2 \to 3,\ 3 \to 2$

$b_1 \circ b_2$

$b_2 \circ b_1$

Γ Gruppenax.

$\varphi = \forall v_0 \forall v_1$ (v_0 neutral, v_1 neutral $\to v_1 = v_0$)

v_i neutral $\quad \forall v_2 \; v_2 \circ v_i = v_i \circ v_2 = v_2$

$\subset$ . .

Beweis.

Gödel'scher Vollständigkeitssatz 1929

Es gibt ein recht einfaches Beweisschema $\vdash$, s. d.

$$\Gamma \models \varphi \quad \text{gdw} \quad \underbrace{\Gamma}_{\text{endl. viel gebraucht}} \vdash \varphi$$

es gibt eine endl. Zeichenreihe, die

die nach dem Schema als formalen Beweis zählt

Satz: Koinzidenzlemma Wolfgang Paul

Seien s_1, s_2 A-Belegungen, s.d. $s_1 \restriction fr(\varphi) = s_2 \restriction fr(\varphi)$.

restriction

Dann gilt $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$ gdw $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$.

Beweis: Ind. über φ, Ind. über die Terme.

Fall 1: φ atomar. $t_1 = t_2 = \varphi$

$$\bar{s}_1(t_1) = \bar{s}_1(t_2) \quad \text{heißt} \quad (\mathfrak{A}, s_1) \models t_1 = t_2$$

$$\bar{s}_2(t_1) = \bar{s}_2(t_2) \qquad (\mathfrak{A}, s_2) \models t_1 = t_2$$

Beh: $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$ für alle Terme, die nur Variable von $fr(\varphi)$ enthalten.

Ind. über den Aufbau der Terme.

$s_1(v_j) = s_2(v_j)$ für $v_j \in fr(\varphi)$ nach Vor. des Satzes

$\bar{s}_1(c) = c^{\mathfrak{A}} = \bar{s}_2(c)$ für $c \in \tau$

$$\bar{s}_1(f t_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\underline{\bar{s}_1(t_1)}, \ldots, \underline{\bar{s}_1(t_n)}) \overset{\text{Ind.vor.}}{=} f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_2(t_1), \ldots, \bar{s}_2(t_n))$$

Fall 1b $\quad \varphi$ atomar $\quad \varphi = P t_1 \dots t_n$

$$(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} P^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_1(t_1), \dots, \dots, \bar{s}_1(t_n))$$

$$\shortparallel$$

$$(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} P^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_2(t_1), \dots, \bar{s}_2(t_n))$$

Fall 4 $\quad \varphi = \underline{\forall x}\, \psi \qquad x \notin fr(\varphi) \qquad s_1(x) \neq s_2(x)$ mögl.

$$(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \text{f.a. } a \in A \; (\mathfrak{A}, \underline{s_1(x|a)}) \models \psi$$

$$\Updownarrow \text{ I.V. für } s_i(x|a) \text{ für } \psi$$

$$(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi \Longleftrightarrow \text{f.a. } a \in A \; (\mathfrak{A}, \underline{s_2(x|a)}) \models \psi \qquad \square$$