25.1.2012

1. Ausfüllen der Evaluationsbögen

Syntax

Semantik

$$\underbrace{\Big(\underbrace{\forall v_3 \underbrace{\forall v_4 \underbrace{v_4 = v_3}_{\text{atomar}}}_{\text{Formel}}}_{\text{Formel}} \wedge \underbrace{v_0 < v_1}_{\text{atomar}}\Big)}_{\text{Formel}} = \varphi$$

v_0 tritt frei in φ auf

v_1

$\models$

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \qquad s_1 \restriction \emptyset = s_2 \restriction \emptyset = \emptyset$

Koinzidenzlemma: $s_1 \restriction fr(\varphi) = s_2 \restriction fr(\varphi) \Rightarrow$

$$(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$$

Korollare 1. Wenn φ ein Satz ist, dann gilt

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ für eine Belegung gdw

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ für alle Belegungen.

Wir schreiben $\mathfrak{A} \models \varphi$

2. Sei Σ eine Menge von $\mathcal{L}(\tau)$-Sätzen, und sei φ ein $\mathcal{L}(\tau)$-Satz

$\Sigma \models \varphi$ gdw f.a. τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$.

Schreibweise:

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}]$ als Abk. für

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$, wenn $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ und $s(v_i) = a_i$

<u>Def</u>: $P \subseteq A^n$ heißt definierbar in $\mathfrak{A} = (A, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in \tau}, \dots)$

g.d.w. es $\exists$ eine τ-Formel φ mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$

s.d. $P = \{ \underline{(a_0, \dots, a_{n-1})} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}] \}$

$\mathfrak{A} \models P[a_0, \dots, a_{n-1}] \}$

A unendl. $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A)$ überabzählbar

τ abz. $\Rightarrow$ $L(\tau)$ ist abz.

$\Rightarrow$ es gibt nicht definierbare Tm., Prädikate auf A.

Def: Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen.

i heißt ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf/nach $\mathfrak{B}$ g.d.w

a) $i : A \to B$ bijektiv

b) $i(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle $c \in \tau$ Konst.

c) $P^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ $\left(\Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^{\mathfrak{A}}\right)$

$\Leftrightarrow P^{\mathfrak{B}}(i(a_0), \ldots, i(a_{n-1}))$

$$a <_{\mathfrak{A}} b \to \overset{i}{f}(a) <_{\mathfrak{B}} \overset{i}{f}(b)$$

d) $i(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(i(a_0), \ldots, i(a_{n-1}))$

$$i(a +_{G_1} b) = i(a) +_{G_2} i(b)$$

Γ Formelmenge, φ Formel

$\Gamma \models \varphi$ gdw ($\uparrow$ Gödel) es gibt einen formalen Beweis von φ aus den Voraus. Γ (abgek. $\Gamma \vdash \varphi$)

$\vdash$ \vdash

$\vDash$ \vDash

$\Vdash$

Der Hilbertkalkül für formale Beweise

Modus ponens: Aus φ und aus $(\varphi \to \psi)$ folgt ψ

$\neg\varphi \vee \psi$

φ heißt Verallg. von ψ g.d.w. es ein n gibt und Variablen $v_0, \dots, v_{n-1}$ gibt s.d. $\varphi = \forall v_0 \dots \forall v_{n-1} \psi$

Die Logischen Axiome bestehen aus 6 Gruppen:

elementarste Beweisregel

und aus allen Verallgemeinerungen von log. Axiomen

1. Alle Tautologien der Aussagenlogik

$\Big(\text{z.B. } \underbrace{((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \leftrightarrow \cancel{\varphi \vee}\ \psi}_{\alpha_i} \Big)$

2. Ersetzungs~~regeln~~axiom:

$\forall x \alpha \to \alpha^x_t$, wenn t für x in α eingesetzt werden kann.

α x ersetzt durch t, t Term — wird später geklärt

3. $\forall x (\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

4. $\alpha \to \forall x \alpha$, wenn x nicht frei in α auftritt

5. $x = x$

6. $x = y \to (\alpha \to \alpha')$

wobei α' aus α entsteht, indem einige x in α durch y ersetzt werden.

Ein Beweis von φ aus Γ ist eine Folge $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ von Formeln s.d. f.a. $i \leq n$

1. $\alpha_n = \varphi$
2. $\alpha_i \in \underline{\Gamma}$ oder α_i ist ein log. Axiom.
3. es gibt $j, k < i$ s.d. $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i)$

$$\langle \alpha_0, \ldots \quad \alpha_k \quad \ldots \quad \alpha_j, \ldots \alpha_{i-1} \;\Big|\; \underline{\underline{\alpha_i}} \quad , \alpha_n \rangle$$

$$\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i)$$

$k \qquad j$

<u>Def</u> Wir def. induktiv über den Aufbau von α, wann $\underbrace{t \text{ für } x \text{ in } \alpha \text{ eingesetzt werden kann}}$:

$\leadsto$ x ist frei für t in $\underline{\alpha}$

1. t kann in atomaren Formeln α für x eingesetzt werden
2. t " " $\neg\alpha$ für x " "

$\Longleftrightarrow$ t kann in α für x eing. werden.

t kann in $(\alpha \to \beta)$ für x eing. werden gdw t in α für x einges. werden kann und in β.

3. t in $\underset{v_j}{\forall y}\,\alpha$ für $\dfrac{x}{v_i}$ eingesetzt werden gdw. $\left(„\forall y \alpha\,{}^{x}_{t} \equiv \forall y \alpha" \right)$

(a) ~~wenn~~ x in $\forall y \alpha$ nicht <u>frei</u> auftritt

(b) $x \neq y$ und y in t nicht auftritt und t in α für x eingesetzt werden kann.

Ein Gegenbeispiel:

$$\alpha = \cancel{\nexists}\ \exists y\ (y \neq x) \equiv \neg \forall y \neg (y \neq x) \equiv \neg \forall y\ y = x$$

$$t = y$$

α^x_t wird gebildet, obwohl es nach der vor Def nicht gestattet

$$„\alpha^x_t\text{“} = \exists y\ (y \neq y)$$

„Axiom“ $\quad \forall x \alpha \longrightarrow \alpha^x_t$

$$\forall x \exists y\ (x \neq y) \longrightarrow \exists y (y \neq y).$$

$|A| \geq 2, \quad I = \emptyset \qquad A$ erfüllt das Axiom nicht.

$\alpha^x_t \qquad \alpha^t_x \qquad \alpha(x|t) \qquad \alpha_x[t]$

Def: Wir def. induktiv über den Aufbau von α die Formel α^x_t („α x ersetzt durch t"), falls t in α für x eingesetzt werden kann.

1. Für atomares α ist α^x_t die Formel α_1, in der alle x durch t ersetzt werden.
2. $(\neg\alpha)^x_t = \neg\alpha^x_t$, wenn t in α für x eing. werden kann.
3. $(\alpha \to \beta)^x_t = (\alpha^x_t \to \beta^x_t)$, " α, β
4. $(\forall y\, \alpha)^x_t$ ist
   a) $\forall y\, \alpha$ falls $x = y$
   b) $\forall y (\alpha^x_t)$ falls $x \neq y$ und x in $\forall y \alpha$ nicht frei auftritt
   c) $\forall y\, \alpha^x_t$ falls $x \neq y$, y ~~tritt~~ nicht in t, ~~α~~ x ~~kann~~ in α durch t ersetzt werden kann.

Ziel: Die Ersetzungsaxiome sind $\underbrace{\text{in allen Strukturen mit allen Beleg. wahr}}_{\text{gültig}}$.

Lemma Ersetzungslemma, Substitutionslemma

Wenn t für x in α eingesetzt werden kann

$$\mathfrak{A} \models \alpha^x_t\, [s] \iff \mathfrak{A} \models \alpha\, [s(x \mid \underbrace{\bar{s}(t)}_{\in A})]$$

Beweis: Wir $\overset{\text{gleichzeitig für alle } s}{\text{schränken}}$ den Induktionsschritt für $\underline{\varphi = \forall y\, \alpha}$ auf im Fall 4c) der vor. Def.

$s((x, t_1)\,(y, t_2))$

x

$f(x)$

$f(f(x))$

$f(\ \dots)$

Wissen: t kann in φ für x eingesetzt werden nach 4c)

α^x_t wohldef.

d.h. $x \neq y$, y nicht in t,

$$\mathfrak{A} \models \varphi^x_t\, [s] \overset{\text{Def 4c}}{\iff} \mathfrak{A} \models (\forall y\, \alpha^x_t)\, [s] \overset{\text{Def von } \models}{\iff} \text{f.a. } a \in A$$

$$\mathfrak{A} \models \alpha^x_t\, [s(y \mid a)] \underset{\text{auf } s(y|a) \text{ auf } \alpha}{\overset{\text{I.V. f.a. } a \in A}{\iff}} \mathfrak{A} \models \alpha\, [s(y \mid a)(x \mid \underbrace{\overline{s(y \mid a)}(t)}_{= \bar{s}(t)})]$$

$$\mathfrak{A} \models \alpha\, [s(x \mid \bar{s}(t))(y \mid a)]$$

$$\underset{\text{Def}}{\iff} \cancel{\mathfrak{A} \models} \text{ f.a. } a \in A \quad \mathfrak{A} \models (\forall y\, \alpha)\, [s(x \mid \bar{s}(t))]$$