1. 2. 2012

Für alle Γ, φ

$$\Gamma \models \varphi \quad \underset{\text{Vollständigkeit}}{\overset{\text{Korrektheit}}{\Longleftrightarrow}} \quad \Gamma \vdash \varphi$$

$\vdash$: es gibt einen formalen Beweis

: Hilbertkalkül

modus ponens

Verallgemeinerung

$\langle \alpha_0, \ldots\ldots, \alpha_n \rangle$

$\alpha_n = \varphi$

$\alpha_i \in \Gamma$

$\alpha_i \in \Lambda$ log. Axiom.

$\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i) \quad k, j < i$

$\emptyset \vdash \varphi$

für $\varphi \in \Lambda$

$\downarrow$

$\emptyset \models \varphi$

f.a. τ-Str. $\mathfrak{A}$ f.a. Bel. s

$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

$$\mathfrak{A} \models \overbrace{\underline{\forall y}\; \underbrace{\alpha^x_t}_{\text{I.V.}}}^{\varphi^x_t} \quad [s]$$

$$\overset{\text{Def. von } \models\, \forall}{\iff} \quad \text{f. a. } a \in A \quad \mathfrak{A} \models \alpha^x_t \; [\underbrace{s(y|a)}_{= s'}]$$

$$\Updownarrow \text{(I.V.) von Lemma auf } \alpha \text{ und } s'$$

$$\iff \quad \text{f. a. } a \in A \quad \mathfrak{A} \models \alpha \; [\underbrace{s(y|a)}_{s'} \; (x \mid \underbrace{\bar{s}'(t)}_{\in A.}))]$$

$$\overline{s(y|a)}\,(t)$$

$$\iff \quad \underline{\text{f. a. } a \in A} \quad \mathfrak{A} \models \alpha \; [\underline{s\,(x \mid \bar{s}(t))\,(y|a)}]$$

$$\bar{s}(t) = \bar{s}'(t)$$

da y in t nicht vorkommt

$$\overset{\text{Def. von } \models \text{ im } \forall}{\iff} \quad \mathfrak{A} \models \forall y\; \alpha \; [s(x \mid \bar{s}(t))].$$

$$\overset{\text{Fa.}}{} \quad \mathfrak{A} \models \varphi \; [s(x \mid \bar{s}(t))].$$

x

$f(x)$

$f(f(x))$

$f(f(f(x)))$

Korollar: Die Ersetzungsaxiome sind gültig

$\mathfrak{A} \models \forall x \alpha \to \alpha^x_t$, falls t für x in α eingesetzt werden kann.

Bew: $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x \alpha$ $\qquad \mathfrak{A} \models \alpha[s(x|a)]$

$\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ f.a. $\underline{a \in A \ (\mathfrak{A}, s) \models \alpha[a]}$. $\qquad (*)$

$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha^x_t \quad \overset{\text{Lemma}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathfrak{A} \models \alpha \underbrace{[s(x|\bar{s}(t))]}_{=:a}$.

$\uparrow$

diese Seite ist richtig nach $(*)$

Also: $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha^x_t$

__Satz__ Gültigkeitssatz

Jedes log. Axiom ist gültig.

Beweis: Durchprüfen.

$$\mathfrak{A} \models \forall x\, (\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta).$$

__Satz__ Korrektheitssatz

Wenn $\underline{\Gamma \vdash \varphi}$, dann $\Gamma \models \varphi$.

Beweis: Induktiv über die Beweislänge

$\langle \underline{\alpha_0, \ldots}, \alpha_n \rangle$ formaler Beweis von φ aus Γ.

$\alpha_n = \varphi$

1. Fall $\alpha_i \in \Lambda$ $\quad \Gamma \models \alpha_i$ da $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha_i$

2. Fall $\alpha_i \in \Gamma$ $\quad (\mathfrak{A}, s) \models \Gamma \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \alpha_i$

3. Fall: Gelte $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$ und gelte (nach I.V.) $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}$

Modus ponens Fall: $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i)$, $k, j < i$ $\quad (\mathfrak{A}, s) \models \alpha_k \wedge \alpha_j$

$(\mathfrak{A}, s) \models (\alpha_j \to \alpha_i) \wedge \alpha_j$

Def: 1. Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathcal{L}(\tau)$ heißt widerspruchsfrei, konsistent (consistent) :gdw es keine Formel $\underline{\varphi}$ gibt, s.d.

$\Gamma \vdash \underline{\varphi}$ und $\Gamma \vdash \neg \underline{\varphi}$.

$\Gamma \vdash 0 \neq 1$ $\qquad$ $\Gamma \vdash \underline{0 = 1}$

„Standardbeispiel"

2. $\Gamma \subseteq \mathcal{L}(\tau)$ heißt erfüllbar (satisfiable) :gdw ex $\mathfrak{A}$, ex A-Beleg. s, s.d. $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$.

Korollar: Wenn Γ erfüllbar ist, dann ist Γ konsistent.

Bew: $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$ und angenommen: $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Korrektheitssatz: $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ und $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\varphi$ ↯.

4.19 **Satz** Gödel'scher Vollständigkeitssatz:

(a) Jede konsistente Formelmenge ist erfüllbar

(b) Wenn $\Gamma \models \varphi$, dann $\Gamma \vdash \varphi$

Wir werden (a) durch eine Konstruktion beweisen mit der Henkinkonstr.

~~(b) ⇒ (a)~~

(a) ⇒ (b)

Wenn $\Gamma \models \varphi$ und angenommen $\Gamma \nvdash \varphi$, dann

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist konsistent.

Teil (a) auf die Menge $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ liefert ein Modell $(\mathfrak{A}, s)$ von $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $(\mathfrak{A}, s)$ widerspricht der Ann. $\Gamma \models \varphi$ ↯.

(b) ⇒ (a) $\quad \underbrace{\Gamma \models 0 = 1}_{\text{nie}} \Longrightarrow \Gamma \vdash 0 = 1$

Γ Formelmenge, wf.

Metasätze: Zeigen, dass $\vdash$ ein starkes Beweishilfsmittel

4.11 Lemma:

Wenn $\Gamma \vdash \alpha_i$ für alle $i < n$ und $\bigwedge_{i<n} \alpha_i \to \beta$ eine (aussagenlog.) Tautologie ist, dann $\Gamma \vdash \beta$.

Bew: $$\left(\bigwedge_{i<n} \alpha_i \to \beta\right) \longleftrightarrow \left(\alpha_0 \to \underbrace{\left(\alpha_1 \to \left(\alpha_2 \ldots \to \left(\alpha_{n-1} \to \beta\right)\right)\right)\right)}_{n}\right)$$

n Mal modus ponens Regel

4.12 Wenn $\Gamma \cup \{\gamma\} \underset{(1)}{\vdash} \varphi$, dann $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$

Beweis: Durch Ind. über die Länge (1)

Lemma Reductio ad absurdum, Widerspruchsbeweis

Wenn $\Gamma \cup \{\varphi\}$ nicht konsistent, dann $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Bew: $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \beta \overset{\text{Lem}}{\iff} \Gamma \vdash (\varphi \to \beta)$

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\beta \iff \Gamma \vdash (\varphi \to \neg\beta)$

$\neg\beta \to \neg\varphi$

$\beta \to \neg\varphi$

$\underbrace{\beta \vee \neg\beta} \to \neg\varphi$

$\emptyset \vdash \beta \vee \neg\beta$

Konstruktivismus
Intuitionismus } Niederland Brouwer
Heyting

$\vdash$

Lemma Erste Regel über Verallg.

Wenn $\Gamma \vdash_{\cancel{\mathcal{L}}^{(1)}} \varphi$ und x in keine ~~keine~~ Formel von Γ vorkommt, dann

$$\Gamma \vdash \forall x \varphi$$

$\models$

Beweis: Induktiv über die Länge von $\cancel{\vdash}^{(1)}$ Shoenfield

1. $\varphi \in \Lambda$ Enderton
2. $\varphi \in \Gamma$ x nicht in φ
3. modus ponens.

$$\underbrace{\forall x (\varphi \to \psi)}_{\alpha_k} \to (\underbrace{\forall x \varphi}_{\alpha_j} \to \forall x \psi).$$

$\vdots$

$$\psi = (\alpha_k \to \alpha_j) = \alpha_i$$

<u>Lemma</u> α^{x}_{t} $\quad \alpha^{x\,y}_{y\,x}$ "=" α , α^{x}_{c} ← $c \in T$ Konstanten

(a) x kann in jedem α für ~~sich~~ x eingesetzt werden

(b) t kann in α für x eingesetzt werden, wenn keine Variable von α in t vorkommt.

$\updownarrow$

α' abg. Variable umb.

(c) Wenn x, y Variablen sind und $\overset{t}{\underset{"}{y}}$ nicht in φ, dann ist φ^{x}_{y} definiert, und $(\varphi^{x}_{y})^{y}_{x}$ ist def. und $(\varphi^{x}_{y})^{y}_{x} = \varphi$

(d) x, y, z Va. $x \neq z$, φ^{x}_{t} def.

Dann ist $(\varphi^{y}_{z})^{x}_{t}$ def. Bew Induktion über φ^{x}_{t}

(e) φ^{x}_{t} def., y nicht in φ, c Konst.

t^{c}_{y} : in t alle y durch c ersetzt.

φ^{c}_{y} : ~~in~~ alle y durch c ersetzt. Dann $(\varphi^{y}_{c})^{x}_{(t^{y}_{c})}$

Lemma $\Gamma \vdash \varphi$, c nicht in Γ

Dann $\Gamma \vdash \forall y\ \varphi^{c}_{y}$

Lemma $\Gamma \vdash \varphi^{x}_{c}$, c nicht in Γ, φ

Dann $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ und im Beweis tritt kein c auf.

Lemma φ, t, x geg. Dann gibt es ein Form φ', s.d.

(a) $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$

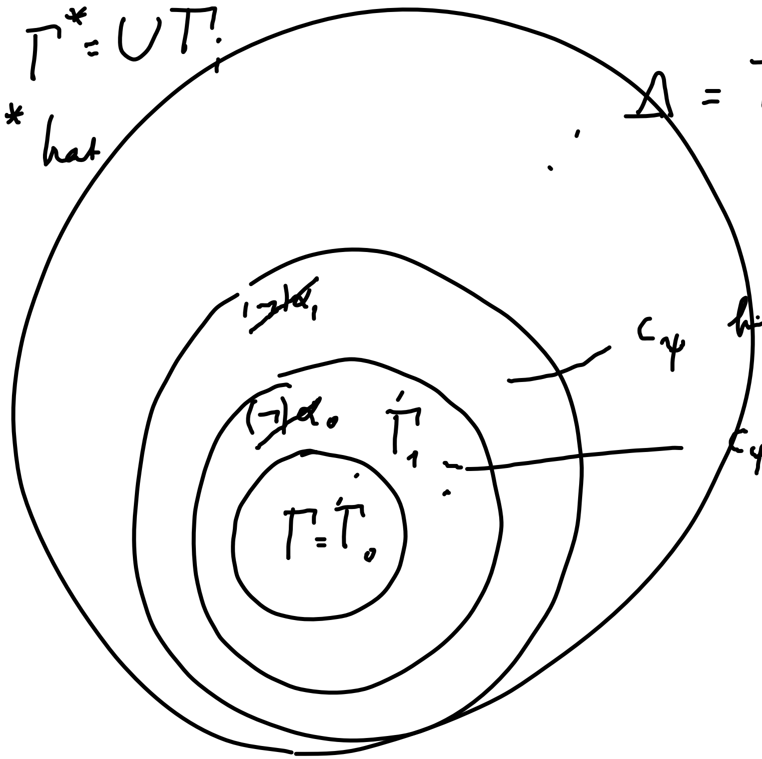
(b) φ'^{x}_{t} def.

Beweis des Vollständigkeitssatzes Sei Γ w.f. Gesucht ist ein Modell.

$\Gamma^* = \bigcup \Gamma_i$

Γ^* hat

(ii)



$\Delta = \Gamma \cup \{(\neg)\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

c_φ für $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma_1) = \mathcal{L}(\underbrace{\tau \cup \{c_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}(\tau)\}}_{\tau_1})$

c_φ für $\varphi \in \mathcal{L}(\Gamma)$ = $\mathcal{L}(\tau)$

<u>Beh</u>: Es gilt $\Delta \supseteq \Gamma$ und $\Delta \subseteq \mathcal{L}(\tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\})$

$\notin \tau$, „Henkinkonstanten"

mit folg. Eig:

i) Δ ist in $\mathcal{L}(\tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ konsistent und maximal : $\varphi \in \Delta$ oder $\neg\varphi \in \Delta$.

d.h. f.a. $\varphi \in$ "

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{c_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}(\tau_n)\}}_{\subseteq \tau_{n+1}}$$

(ii) Δ ist eine Henkin-Menge d.h.

für jedes $\varphi \in \mathcal{L}(\tau \cup \{\underline{c}_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ und für jede Variable x gibt es ein c_{i} s.d. $(\neg \forall x \varphi \to \neg \varphi^{x}_{c_\varphi}) \in \Delta$

$\exists x \neg\varphi \to \neg \varphi^{x}_{c_\varphi}$

$\in \tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Beh.: $\overline{\Gamma}_1 = \Gamma \cup \{\underline{(\neg \forall x \varphi \to \neg \varphi^{x}_{c^x_\varphi})} \mid \varphi \in \mathcal{L}(\tau)\}$

ist konsistent.

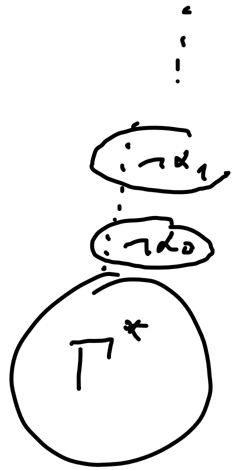
$\Gamma \cup \{\psi_0, \dots, \psi_n\} \vdash \underline{\psi_{n+1}}$

$\vdash \underline{\neg\psi_{n+1}}$

$\psi_{n+1} = \underline{\neg \forall x \varphi} \to \neg \varphi^{x}_{\underline{c^x_\varphi}}$

Wenn $\Gamma \cup \{\psi \dots\} \vdash \neg \psi_{n+1}$

$\Gamma \cup \{\psi_0 \dots, \psi_n\} \vdash \cancel{\neg} \varphi^{x}_{c^x_\varphi} \overset{\text{Lem}}{\Longrightarrow} \Gamma \cup \{\dots\} \vdash \forall x \varphi$



$\subseteq \mathcal{L}(\tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\})$

$\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ zählen $\mathcal{L}(\tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\})$

Wie in der Aussagenlogik

$\exists\, \Delta \supseteq \Gamma^*$, Δ ist maximal und in $\mathcal{L}(\tau \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\})$

Aus Δ kann man $\mathfrak{A}, s$ definieren.. $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$